Elemente der Analysis II: Zusammenfassung der wichtigsten Definitionen und Ergebnisse

J. Wengenroth

Dies ist die einzige zugelassene „Formelsammlung“, die bei der Klausur benutzt werden darf. Es dürfen Unterstreichungen und farbige Hervorhebungen mit Textmarker ABER SONST KEINE VERÄNDERUNGEN UND ZUSÄTZE gemacht werden.

Kapitel 1

1.3 Vektoren

Ein n -dimensionaler Vektor besteht aus n reellen Zahlen, wobei auf die Reihenfolge zu achten ist. Schreibweisen sind $x = [x_1, \dots, x_n]$ als Zeilenvektor und

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ als Spaltenvektor. $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller n -dimensionalen Vektoren.

1.4 Addition

$[x_1, \dots, x_n] + [y_1, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n]$ und $a[x_1, \dots, x_n] = [ax_1, \dots, ax_n]$ für $a \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

1.5

Mit diesen Operationen kann man wie üblich rechnen (allerdings gibt es keine Division).

1.6 Basen

Eine Menge $\{z^1, \dots, z^n\}$ von n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ heißt Basis, falls jedes $x \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Darstellung als Linearkombination $x = a_1 z^1 + \dots + a_n z^n$ hat. Wichtigstes Beispiel: $e^k = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ k -ter Einheitsvektor, dann ist $\{e^1, \dots, e^n\}$ eine Basis.

1.7 Skalarprodukt

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ Skalarprodukt. Falls $\langle x, y \rangle = 0$ heißen x und y orthogonal oder senkrecht zueinander. $\|x\| = \|x\|_n = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ heißt euklidische Länge von x , und $\|x - y\|$ heißt euklidischer Abstand.

1.8

- (a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- (b) $\langle x, ay + bz \rangle = a\langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$
- (c) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
- (d) x, y senkrecht $\iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
- (e) $\|ax\| = |a| \|x\|$
- (f) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ Cauchy-Schwarz
- (g) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- (h) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

1.11 Ausgleichsgerade

Für Daten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ heißt die Funktion $f(x) = ax + b$ die zugehörige Ausgleichsgerade, falls $d(a, b) = \sum_{k=1}^n (y_k - f(x_k))^2$ minimal ist. Mit $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ und entsprechendem $\bar{y}$ sind

$$a = \frac{\langle x, y \rangle - n\bar{x}\bar{y}}{\|x\|^2 - n\bar{x}^2} \text{ und } b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Kapitel 3

3.2 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt linear, falls $f(ax) = af(x)$ und $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}$.

3.6 Matrizen

Eine $m \times n$ Matrix $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist Tabelle reeller Zahlen mit m Zeilen (der

Länge n) und n Spalten (der Länge m): $P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{m,1} & p_{m,2} & \cdots & p_{m,n} \end{bmatrix}$.

Für $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist $P \cdot x = \begin{bmatrix} p_{1,1}x_1 + \cdots + p_{1,n}x_n \\ \vdots \\ p_{m,1}x_1 + \cdots + p_{m,n}x_n \end{bmatrix}$. Jede

lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist von der Form $f(x) = P \cdot x$, wobei $P = [f(e^1), \dots, f(e^n)]$ die Matrix mit den Spalten $f(e^k)$ ist.

3.8 Lineare Gleichungssysteme

Ein $\text{LGS}_{m \times n}$ ist eine Gleichung der Form $P \cdot x = y$, wobei $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $y \in \mathbb{R}^m$ gegeben sind und $x \in \mathbb{R}^n$ gesucht wird.

3.10 Der Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{rcccccc} & p_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & p_{1,n}x_n & = & y_1 \\ \text{Gegeben } \text{LGS}_{m \times n} \ P \cdot x = y, \text{ also} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & p_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & p_{m,n}x_n & = & y_m \end{array}$$

I $_{m,n}$ Vertausche nötigenfalls Zeilen, so dass $p_{m,n} \neq 0$. Falls alle $p_{j,n} = 0$, löse das $\text{LGS}_{m,n-1}$ $\tilde{P} \cdot \tilde{x} = y$, wobei $\tilde{P}$ durch Streichung der letzten Spalte hervorgeht und setze $x = [\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1}, x_n]$ mit beliebigem x_n .

II $_{m,n}$ Für $j = 1, \dots, m-1$ setze $\alpha_j = -\frac{p_{j,n}}{p_{m,n}}$ (und addiere das α_j -fache der letzten Zeile zur j -ten Zeile)

III $_{m,n}$ Löse das $\text{LGS}_{m-1,n-1}$ $\tilde{P} \cdot \tilde{x} = \tilde{y}$ mit $\tilde{P}_{j,k} = p_{j,k} + \alpha_j p_{m,k}$ und $\tilde{y}_j = y_j + \alpha_j y_m$

IV $_{m,n}$ Ist $\tilde{x} = [x_1, \dots, x_{n-1}]$ Lösung von $\tilde{P} \cdot \tilde{x} = \tilde{y}$, so ist $x = [x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$ Lösung von $P \cdot x = y$ für $x_n = \frac{1}{p_{m,n}}(y_m - p_{m,1}x_1 - \dots + p_{m,n-1}x_{n-1})$.

Beispiel.

$$\begin{array}{rcccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

- $\alpha_1 = 4$ (addiere 4-faches der dritten Gleichung zur ersten)
 $\alpha_2 = -1$ (und subtrahiere dritte Gleichung von der zweiten)
 Das $\text{LGS}_{3 \times 3}$ hat dieselben Lösungen wie

$$\begin{array}{rcccccc} 7x_1 & + & 6x_2 & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

- $\alpha_1 = 3$ (addiere 3-faches der zweiten Gleichung zur ersten) Das LGS hat dieselben Lösungen wie

$$\begin{array}{rcccccc} 10x_1 & & & & = & 10 \\ x_1 & - & 2x_2 & & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array}$$

- Die eindeutige Lösung ist $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 1$.

3.14 Matrix-Produkt

Das Produkt zweier Matrizen $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $Q \in \mathbb{R}^{n \times s}$ ist eine $(m \times s)$ -Matrix mit den Einträgen $[P \cdot Q]_{j,\ell} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} q_{k,\ell} =$ Skalarprodukt der j -ten Zeile von P mit der k -ten Spalte von Q . Für $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $Q \in \mathbb{R}^{t \times s}$ mit $n \neq t$ ist kein Matrixprodukt definiert.

3.15

$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, falls $A \cdot B$ und $B \cdot C$ definiert sind.
 $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, falls $A \cdot B$ und $A \cdot C$ definiert sind.

3.17 Inverse Matrix

Die Matrix $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Diagonalelemente 1 und alle anderen 0 sind, heißt Einheitsmatrix.

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt invertierbar, falls es $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit $A \cdot B = E_n$. Dann schreibt man $B = A^{-1}$ und nennt B die inverse Matrix von A . Falls $A \cdot B = E_n$, gilt auch $B \cdot A = E_n$.

3.18 Satz

- (a) Ist A invertierbar, so besitzt für jedes $y \in \mathbb{R}^n$ das LGS $A \cdot x = y$ genau eine Lösung $x = A^{-1} \cdot y$.
- (b) Sind die n LGS $A \cdot x = e^k$ alle lösbar, so ist A invertierbar und die Lösungen sind die Spalten von A^{-1} .

Ü 14. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertierbar $\iff ad \neq bc$ und dann ist $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Kapitel 4

4.2 Stetigkeit

Eine Abbildung $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt stetig im Punkt $x \in A$, falls es zu jeder Outputtoleranz $\varepsilon > 0$ eine Inputtoleranz $\delta > 0$ gibt, so dass jeder Input, der die Toleranz δ einhält zu einem Output führt, der die Toleranz ε einhält, also

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in A \left(\|x - y\|_n < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_m < \varepsilon \right).$$

Die Funktion heißt stetig auf A , falls sie in jedem Punkt stetig ist.

4.3

Lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind auf $\mathbb{R}^n$ stetig.

4.4

(b) Linearkombinationen stetiger Funktionen $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind stetig.

(c) Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig.

(d) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ beide stetig $\Rightarrow fg : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig.

Kapitel 5

5.2 Offene Mengen

Eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt offen, falls jeder Punkt von A Mittelpunkt einer kleinen Kugel ist, die ganz in A liegt, das heißt

$$\forall a \in A \exists r > 0 \ K(a, r) \subseteq A, \text{ wobei } K(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|a - x\| < r\}$$

5.3 Richtungsableitung

Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in A$ und $v \in \mathbb{R}^n$ eine Richtung. Eine Funktion $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt richtungsdifferenzierbar in x in Richtung v , falls

$$D_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)) \text{ in } \mathbb{R}^m \text{ existiert.}$$

Dann heißt $D_v f(x)$ Richtungsableitung in x in Richtung v . Hat f die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$, so hat $D_v f(x)$ die Komponenten $g'_k(0)$ mit $g_k(t) = f_k(x + tv)$.

5.4 Notwendiges Optimalitätskriterium für $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

Ist $f(x) = \max\{f(y) : y \in A\}$ (oder $\min\{f(y) : y \in A\}$), so gilt $D_v f(x) = 0$ für jede Richtung v , in die f richtungsdifferenzierbar ist.

Dies wendet man fast ausschließlich auf die partiellen Ableitungen an.

5.6 Partielle Ableitungen

$D_j f(x) = D_v f(x)$ (für $v = e^j = j$ -ter Einheitsvektor) heißt j -te partielle Ableitung von f .

Berechnung: Fasse alle x_k für $k \neq j$ als fest auf, und differenziere die Funktion $x_j \mapsto f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)$. Für partiell differenzierbares $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Komponentenfunktionen $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$Df(x) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(x) & \cdots & D_n f_1(x) \\ \vdots & & \\ D_1 f_m(x) & \cdots & D_n f_m(x) \end{bmatrix} \quad \text{JACOBI-Matrix von } f \text{ in } x.$$

Für $m = 1$ hat $Df(x)$ nur eine Zeile, und man schreibt $\nabla f(x) = Df(x) = [D_1f(x), \dots, D_nf(x)] = \text{Gradient von } f \text{ in } x$.

5.7 Totale Differenzierbarkeit

$f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt total differenzierbar, wenn es eine Matrix $f'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt mit

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{\|f(y) - f(x) - f'(x) \cdot (y - x)\|_m}{\|x - y\|_n} = 0$$

5.8 Satz.

f total differenzierbar in $x \Rightarrow$ es existieren alle Richtungsableitungen $D_v f(x) = f'(x) \cdot v$ und $f'(x) = Df(x) = \text{Jacobi-Matrix}$.

5.10 Interpretation des Gradienten

Der Gradient von $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Richtung des steilsten Anstiegs, das heißt

$$\text{für } v^* = \begin{bmatrix} D_1f(x) \\ \vdots \\ D_nf(x) \end{bmatrix} \text{ und alle } v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|v\| = \|v^*\| \text{ gilt } D_{v^*}f(x) \geq D_vf(x).$$

5.11 Rechenregeln

$(af + bg)'(x) = af'(x) + bg'(x)$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$
 und $(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$ für $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$

5.13 Kettenregel

$f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$ total differenzierbar in $x \in A$ beziehungsweise $f(x) \in B \Rightarrow (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ (Matrixprodukt).

5.15 Kriterium für totale Differenzierbarkeit

$f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ in jedem Punkt partiell differenzierbar und $D_1f, \dots, D_nf$ alle stetig in $x \in A \Rightarrow f$ total differenzierbar in x .

5.16

$f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt stetig differenzierbar, falls alle partiellen Ableitungen überall existieren und in jedem Punkt stetig sind.

Ü 36. Kompositionen stetig differenzierbarer Funktionen sind stetig differenzierbar. Das Gleiche gilt für Linearkombinationen, Produkte und Quotienten (sofern sie definiert sind).

Kapitel 6

6.2 Konvexität

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in A$ das Segment $S = \{x + t(y - x) : t \in [0, 1]\} \subseteq A$ ist.

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex, falls A konvexe Menge ist und $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ für alle $x, y \in A, t \in [0, 1]$.

6.3 Satz.

Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und total differenzierbar in x mit $\nabla f(x) = 0$, so ist $f(x) = \min\{f(x) : x \in A\}$.

6.4

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt zweimal stetig differenzierbar, falls alle $D_j f : A \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind. Dann heißt

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} D_1(D_1 f)(x) & D_2(D_1 f)(x) & \dots & D_n(D_1 f)(x) \\ \vdots & & & \\ D_1(D_n f)(x) & D_2(D_n f)(x) & \dots & D_n(D_n f)(x) \end{bmatrix}$$

die HESSE-Matrix von f in x .

Eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt (streng) positiv definit, falls $v^t H v \geq 0$ (beziehungsweise > 0) für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (dabei ist $v^t = [v_1, \dots, v_n]$ der zu v transponierte Zeilenvektor).

6.5 Satz.

Ist $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf der konvexen Menge A und $H_f(x)$ in jedem Punkt $x \in A$ positiv definit, so ist f konvex.

Ü 34. Eine symmetrische Matrix $H = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ ist genau dann (streng) positiv definit, wenn $a \geq 0, c \geq 0$ und $ac \geq b^2$ (beziehungsweise $a > 0$ und $ac > b^2$).

6.6 Hinreichendes Optimalitätskriterium

Für $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar gilt:

$\nabla f(x) = 0$ und $H_f(x)$ streng positiv definit $\Rightarrow x$ lokales Minimum, das heißt, es gibt $\delta > 0$, so dass $f(x) \leq f(y)$ für alle $y \in A$ mit $\|x - y\| < \delta$.

Anwendung auf $-f$ liefert Maximalitätskriterium.

Gibt es $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $v^t H_f(x) v > 0$ und $w^t H_f(x) w < 0$, so ist x kein lokales Extremum.

6.8 Satz von Schwarz.

Für zweimal stetig differenzierbares $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $D_j(D_k f)(x) = D_k(D_j f)(x)$ für alle $j, k \in \{1, \dots, n\}$ und $x \in A$.

Kapitel 7

7.5 Auflösemethode.

Gesucht ist $\max\{f(x, y) : \Phi(x, y) = c\}$ mit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $\Phi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Es gebe $B \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und Auflösefunktion $g : B \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ und $y \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in A \text{ und } \Phi(x, y) = c \iff x \in B \text{ und } y = g(x).$$

Dann ist $\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix}$ genau dann eine Lösung von $\max\{f : \Phi = c\}$, wenn $y^* = g(x^*)$ und $f(x^*, g(x^*)) = \max\{f(x, g(x)) : x \in B\}$.

7.6 Lagrange-Methode

Ist $x \in A$ eine Lösung von $\max\{f : \Phi = c\}$, so dass $\nabla\Phi_1(x), \dots, \nabla\Phi_m(x)$ linear unabhängig sind, so gibt es Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ mit

$$\nabla f(x) = \lambda_1 \nabla\Phi_1(x) + \dots + \lambda_m \nabla\Phi_m(x) \quad (\text{Lagrange-Gleichung}).$$

Im Fall $m = 1$ bedeutet die lineare Unabhängigkeit lediglich $\nabla\Phi(x) \neq [0, \dots, 0]$. Die Lagrange-Gleichung für die Komponenten der Gradienten liefert ein Gleichungssystem.

Kapitel 8

8.3

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt integrierbar mit Integral $I = \int_a^b f(x) dx =$

$\int_a^b f(t) dt = \dots$ falls die Riemann-Summen

$$R(f, \mathcal{P}, z) = \sum_{k=1}^n f(z_k)(x_k - x_{k-1}) \quad (a = x_0 < \dots < x_n = b, z_k \in [x_{k-1}, x_k])$$

für $\max\{x_k - x_{k-1} : k \in \{1, \dots, n\}\} \rightarrow 0$ gegen I konvergieren.

8.4 Satz.

(a) Jede stetige Funktion ist integrierbar.

(b) Das Integral ist linear: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

(c) Monotonie: $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

(d) Δ -Ungleichung: $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

(e) Intervallteilung: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ für $c \in [a, b]$.

8.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig.

(a) $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ist eine Stammfunktion, d.h. $F' = f$

(b) Ist G eine Stammfunktion von f , so gilt für alle $\alpha, \beta \in [a, b]$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = G \Big|_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha).$$

Dabei ist $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx$, falls $\beta < \alpha$.

8.7 Partielle Integration

Für zwei stetig differenzierbare Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = fg \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

8.8 Substitution

Seien $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : \varphi([\alpha, \beta]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Merkregel $x = \varphi(t) \rightsquigarrow dx = \varphi'(t) dt$.

8.9 Stammfunktion der Umkehrfunktion

Sei $f : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar und bijektiv. Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f , so ist durch

$$G(y) = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

eine Stammfunktion $G : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ der Umkehrfunktion $f^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ gegeben.

8.11 Tabelle von Ableitungen und Stammfunktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$	Def.bereich	Bemerkung
x^a	ax^{a-1}	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$]0, \infty[$	$a \neq -1$ bei F
e^x	e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
a^x	$\ln(a)a^x$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\mathbb{R}$	$a > 0$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$	$x \log(x) - x$	$]0, \infty[$	$\log = \log_e = \ln$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$	$-\log \cos(x)$	$] -\pi/2, \pi/2[$	
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$[-1, 1]$	F mit Satz 8.9
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$		$[-1, 1]$	F mit Satz 8.9
$\arctan$	$\frac{1}{1+x^2}$		$\mathbb{R}$	F mit Satz 8.9

8.12 Ableitungsregeln

- Produktregel: $(fg)' = f'g + fg'$
- Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Kettenregel: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$