J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

**Blatt 14**

Besprechung in der Übung am 16. Februar, 8:30 in E44

Aufgabe 46.

Sei $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, so dass durch $g(x) = f'(x)$ für $x \neq 0$ und $g(0) = 0$ eine Funktion in $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ definiert ist. Zeigen Sie, dass $f(0^\pm) = \lim_{x \to 0\pm} f(x)$ existieren und dass im distributionellen Sinn gilt:

$$f' = g + (f(0^+) - f(0^-))\delta_0.$$

Aufgabe 47.

Zeigen Sie, dass durch $f(x) = \log(|x|)$ und $f(0) = 0$ eine Funktion in $\mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ definiert ist, so dass im distributionellen Sinn $f' = \text{v.p.}(1/x)$ gilt, wobei

$$\text{v.p.}(1/x)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} \varphi(x)/x \, dx.$$

Aufgabe 48.

Sei $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ mit $u' = 0$. Zeigen Sie, dass $u$ mit einer konstanten Funktion übereinstimmt, d.h. $u(\varphi) = c \int \varphi(x)dx$ für ein $c \in \mathbb{K}$ und alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Hinweis: Zeigen Sie $\mathrm{Kern}(I) \subseteq \mathrm{Kern}(u)$ mit $I(\varphi) = \int \varphi(x)dx$.

Aufgabe 49.

Für offenes $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und $s \in \mathbb{N}$ heißt

$$H^s(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^2(\Omega) \text{ für alle } |\alpha| \leq s\}$$

Sobolev-Raum der Ordnung $s$, wobei $\partial^\alpha f$ die distributionalle Ableitung bezeichnet, die also mit der zu einer $L^2$-Funktion gehörigen Distribution übereinstimmen soll. Zeigen Sie, dass $H^s(\Omega)$ mit der durch

$$\|f\|_s^2 = \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)}$$

definierten Norm ein Hilbert-Raum ist. Dafür ist es nützlich, von den konkreten Räumen und partiellen Ableitungen zu abstrahieren.