J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 12

Besprechung in der Übung am 2. Februar, 8:30 in E44

Aufgabe 38.

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so dass $(X', \|\cdot\|')$ separabel ist. Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ ebenfalls separabel ist. Folgt aus der Separabilität von X auch die von X'?

Hinweis: Für Elemente $\varphi_n \in S$ einer dichten abzählbaren Menge S von X' wähle man $x_n \in X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $|\varphi_n(x_n)| \geq \|\varphi_n\|'/2$ und zeige mit Hahn-Banach, dass die lineare Hülle von $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in X ist.

Aufgabe 39.

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Krein-Milman, dass es *keinen* normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ gibt mit $(X', \|\cdot\|') = (c_0, \|\cdot\|_\infty)$.

Aufgabe 40.

Bestimmen Sie alle Extremalpunkte der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem gegebenen Messraum $(\Omega, \mathscr{B})$. Geben Sie ein Beispiel an, in dem dies nicht bloß Dirac-Maße sind.

Aufgabe 41. Für eine stetige Funktion $k : [0,1]^2 \to \mathbb{K}$ definieren wir

$$T : C([0,1]) \to C([0,1]) \text{ durch } T(f)(x) = \int_0^1 f(y)k(x,y)dy.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Arzelá-Ascoli für die Einheitskugel B von $C([0,1])$, dass $T(B)$ relativ kompakt ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 1.17 für jedes $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, dass der *Eigenraum* $\{f \in C([0,1]) : T(f) = \lambda f\}$ endlichdimensional ist.