J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 10

Besprechung in der Übung am 19. Januar, 8:30 in E44

Aufgabe 31.

Seien $(X, \mathscr{P})$ ein Fréchet-Raum und $M \subseteq X'$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) M ist $\sigma(X', X)$-beschränkt,

(2) M ist $\beta(X', X)$-beschränkt,

(3) M ist gleichgradig stetig, d.h. $M \subseteq U^\circ$ für eine $\mathscr{P}$-Nullumgebung U.

Aufgabe 32.

Für einen lokalkonvexen Raum $(X, \mathscr{P})$ nennen wir $X'' = (X', \beta(X', X))'$ das Bidual von X. Zeigen Sie:

(a) Für ein lineares $\phi : X' \to \mathbb{K}$ gilt $\phi \in X''$ genau dann, wenn $\phi \in B^{\circ\circ}$ für eine beschränkte Menge $B \subseteq X$.

(b) Die Abbildung $J : X \to X''$, $x \mapsto \delta_x$ mit $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ ist wohldefiniert und linear und injektiv, falls $(X, \mathscr{P})$ Hausdorff.

(c) J ist stetig als Abbildung $(X, \sigma(X, X')) \to (X'', \sigma(X'', X'))$.

(d) Ist jede absolutkonvexe, abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von X schwach kompakt, so ist J surjektiv.

Aufgabe 33.

Seien $(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$ topologische Räume für $\alpha \in I$, $M_\alpha \subseteq X_\alpha$ und $(X, \mathscr{T}) = \prod\limits_{\alpha \in I} (X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha)$.

(a) Zeigen Sie $\overline{\prod\limits_{\alpha \in I} M_\alpha} = \prod\limits_{\alpha \in I} \overline{M_\alpha}$.

(b) Bestimmen Sie das Innere von $\prod_{\alpha \in I} M_\alpha$.

Aufgabe 34.

Wir versehen $[0,1]$ mit der üblichen (durch den Betrag erzeugten) Topologie und $X = [0,1]^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to [0,1] \text{ Abbildung}\}$ mit der Produkttopologie.

(a) Zeigen Sie, dass X kompakt ist aber nicht folgenkompakt, d.h. es gibt Folgen in X ohne konvergente Teilfolge. Benutzen Sie dazu, dass es eine surjektive Abbildung $s : \mathbb{R} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ gibt und definieren Sie $f_n \in [0,1]^{\mathbb{R}}$ durch $f_n(x) = s(x)(n)$.

(b) Sei $A = \{f \in X : \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\} \text{ abzählbar}\}$. Zeigen Sie, dass A (versehen mit der Relativtopologie von X) folgenkompakt ist, aber nicht kompakt.