J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 9

Besprechung in der Übung am 12. Januar, 8:30 in E44

Aufgabe 27. Der Vektorraum

$$s = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : p_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n |x_k| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

versehen mit den Halbnormen p_n heißt *Raum der schnell fallenden Folgen*. Zeigen Sie, dass dies ein Fréchet-Raum ist und dass es für jede Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ ein $x \in s$ gibt mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^n x_k = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 28.

Zeigen Sie, dass ein lokalkonvexer Raum $(X, \mathscr{P})$ genau dann halbnormiert ist (d.h. es gibt eine Halbnorm p auf X mit $\mathscr{P} \sim \{p\}$), wenn es eine $\mathscr{P}$-beschränkte Nullumgebung in $(X, \mathscr{P})$ gibt (Dieser Satz von Kolmogorov aus dem Jahr 1935 war einer der ersten Sätze der lokalkonvexen Theorie).

Aufgabe 29.

Seien $(X, \mathscr{P})$ ein lokalkonvexer Raum, $\mathscr{B}(X)$ das System der $\mathscr{P}$-beschränkten Mengen und

$$p_B(\varphi) = \sup\{|\varphi(x)| : x \in B\} \text{ für } \varphi \in (X, \mathscr{P})' \text{ und } B \in \mathscr{B}(X).$$

Die von $\beta(X', X) = \{p_B : B \in \mathscr{B}(X)\}$ erzeugte Topologie auf $(X, \mathscr{P})'$ heißt *starke Topoloie des Dualraums*. Wegen Satz 2.18 hängt die nur von $(X, \mathscr{P})'$ ab. Zeigen Sie:

(a) $(X', \beta(X', X))$ ist separiert.

(b) Ist (X, p) halbnormiert, so gilt $\beta(X', X) \sim \{p'\}$ mit der Dualnorm $p' = \sup\{|\varphi(x)| : p(x) \leq 1\}$.

(c) Für metrisierbares $(X, \mathscr{P})$ ist $(X', \beta(X', X))$ vollständig.

(d) Sind $(X, \mathscr{P})$ und $(X', \beta(X', X))$ beide metrisierbar, so ist $(X, \mathscr{P})$ halbnormiert. (Tipp: Grothendiecks Faktorisierungssatz)

Aufgabe 30.

Sei $J : c_0 \to \ell_1'$ definiert durch $J(y)(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Gibt es einen Fréchet-Raum X und ein stetiges lineares $T : \ell_1 \to X$ so dass $\text{Bild}(J) = \text{Bild}(T^t)$?