J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 8

Besprechung in der Übung am 5. Januar, 8:30 in E44

Aufgabe 23. Sei $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ eine Matrix, so dass für alle $x \in c_0$ die Reihen $T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k$ konvergieren und $T_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ gilt. Zeigen Sie dass

$$\sup\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 19 zunächst die Stetigkeit aller $T_n : c_0 \to \mathbb{K}$.

Aufgabe 24.

Seien Y ein separabler Banach-Raum und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}} = \overline{B}(0,1)$. Zeigen Sie, dass

$$T : \ell_1 \to Y, (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n y_n$$

eine wohldefinierte, lineare, stetige und offene Abbildung ist. (Jeder separable Banach-Raum ist also ein Quotient von ℓ_1.) Hinweis: Surjektivitätskriterium.

Aufgabe 25.

Berechnen Sie die Fourier-Reihe von $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ und zeigen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Aufgabe 26.

(a) Es seien (X, d_X) ein halbmetrischer Raum, (Y, d_Y) ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to Y$ eine Abbildung mit abgeschlossenem Graphen. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel einer unstetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, deren Graph abgeschlossen ist.