Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 7

Besprechung in der Übung am 15. Dezember, **8:15** in E44

Aufgabe 20.

Seien (X_n, p_n) Banach-Räume mit $X_{n+1} \subseteq X_n$ und $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in X_{n+1}$.

(a) Zeigen Sie, dass $X_\infty = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ versehen mit $\mathscr{P} = \{p_n|_{X_\infty} : n \in \mathbb{N}\}$ eine Fréchet-Raum ist.

(b) Ist X_{n+1} dicht in X_n für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch X_∞ dicht in X_n.

Hinweis: Konstruieren Sie für $x_0 \in X_n$ und $\varepsilon > 0$ rekursiv eine Folge $x_k \in X_{n+k}$ mit $p_{n+k}(x_k - x_{k+1}) < \varepsilon/2^{k+1}$. Zeigen Sie dann, dass $y = x_1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k+1})$ ein Element von X_∞ definiert.

Aufgabe 21.

(a) Für $A = (a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0} \in \,]0,\infty[^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}_0}$ mit $a_{n.k} \leq a_{n+1,k}$ für alle n, k sei

$$\lambda(A) = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}|x_k| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda(A)$ versehen mit den Halbnormen $p_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}|x_k|$ ein Fréchet-Raum ist.

(b) Für $a_{n,k} = n^k$ zeige man, dass $T : H(\mathbb{C}) \to \lambda(A)$ definiert durch $f \mapsto (\frac{f^{(k)}(0)}{k!})_{k\in\mathbb{N}_0}$ ein Isomorphismus ist, d.h. eine lineare, bijektive und stetige Abbildungen mit stetiger Inversen.

Aufgabe 22.

(a) „Konstruieren" Sie ein unstetiges, lineares Funktional $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$.

(b) Für f wie in (a) und $x \in \ell_1$ definiere man $|||x||| := \|x\|_1 + |f(x)|$. Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ eine Norm auf ℓ_1 ist.

(c) Zeigen Sie, dass $id : (\ell_1, |||\cdot|||) \to (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ stetig aber nicht offen ist. Ist $(\ell_1, |||\cdot|||)$ ein Banach-Raum?

Hinweis zu (a): Seien $L = \{y \in \ell_1 : \{n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0\} \text{ endlich}\}$ und $x \in \ell_1 \setminus L$. Definieren Sie $\varphi : \{y + tx : y \in L, t \in \mathbb{K}\} \to \mathbb{K}$, $y + tx \mapsto t$ und setzen Sie mit dem Zornschen Lemma fort.