J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 6

Besprechung in der Übung am 8. Dezember, 8:30 in E44

Aufgabe 17.

Zeigen Sie für den *Schift-Operator* $T : \ell_p \to \ell_p$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ für $1 \leq p < \infty$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$, dass λT dichte Orbits hat.

Aufgabe 18.

Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen sei

$$\mathscr{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp}\varphi \subseteq \Omega \text{ kompakt}\},$$

wobei $\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$. Weiter sei $\mathscr{P}$ eine gerichtete Familie von Halbnormen auf dem Vektorraum $\mathscr{D}(\Omega)$, so dass auf dem lokalkonvexen Raum $(\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{P})$ für jedes $x \in \Omega$ das lineare Funktional

$$\delta_x : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \varphi(x)$$

stetig ist. Zeigen Sie, dass $(\mathscr{D}(\Omega), \mathscr{P})$ kein Fréchet-Raum ist.

Aufgabe 19.

Es seien $(X, \mathscr{P})$ ein Fréchet-Raum und $(Y, \mathscr{Q})$ ein separierter lokalkonvexer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $T_n : (X, \mathscr{P}) \to (Y, \mathscr{Q})$ linear und stetig, so dass $\lim_{n\to\infty} T_n x$ für jedes $x \in X$ existiert. Zeigen Sie, dass

$$T : (X, \mathscr{P}) \to (Y, \mathscr{Q}), x \mapsto \lim_{n\to\infty} T_n x$$

linear und stetig ist.

Hinweis: Satz von Banach-Steinhaus.