Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 5

Besprechung in der Übung am 1. Dezember, 8:30 in E44

Aufgabe 14.

Wir betrachten das duale Paar $\langle \ell_\infty, \ell_1 \rangle$ wobei $\langle x, y \rangle = \sum_{N=1}^{\infty} x_n y_n$. Seien $B = \{x \in \ell_\infty : \|x\|_\infty \leq 1\}$ und $B_0 = B \cap c_0$, wobei c_0 der Teilraum aller Nullfolgen ist. Zeigen Sie

$$\overline{B_0}^{\sigma(\ell_\infty, \ell_1)} = B \text{ und } \overline{B_0}^{\sigma(\ell_\infty, \ell'_\infty)} = B_0.$$

Aufgabe 15.

Zeigen Sie für Folgen $x^n = (x^n_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_1$, dass

$$x^n \to 0 \text{ in } (\ell_1, \|\cdot\|_1) \iff x^n \to 0 \text{ in } (\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell'_1)).$$

Hinweis: Zeigen Sie für die Implikation $\Leftarrow$ zunächst durch einen Widerspruchsbeweis, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ Zahlen $N, K \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\sum_{k=K}^{\infty} |x_k| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Benutzen Sie dann, dass auf jedem endlichdimensionalen Teilraum von ℓ^1 die schwache Topologie mit der Normtopologie übereinstimmt.

Aufgabe 16.

Ein lokalkonvexer Raum $(X, \mathscr{P})$ heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare Teilmenge $M \subseteq X$ gibt mit $\overline{M} = X$, d.h. M ist dicht in X.

(a) Ein lokalkonvexer Raum ist genau dann separabel, wenn es einen abzählbardimensionalen, dichten Teilraum gibt.

(b) Für $1 \leq p < \infty$ ist der Banach-Raum ℓ_p separabel.

(c) ℓ_∞ ist nicht separabel. Zeigen Sie dazu für alle verschiedenen Mengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$, dass $\|I_A - I_B\|_\infty \geq 1$, wobei I_A die Indikatorfunktion von A bezeichnet.