J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 4

Besprechung in der Übung am 24. November, 8:30 in E44

Aufgabe 11.

(a) Zeigen Sie, dass in lokalkonvexen Räumen Abschlüsse von Teilräumen beziehungsweise konvexen Mengen wieder Teilräume beziehungsweise konvex sind.

(b) Wann ist der offene Kern eines Teilraums wieder ein Teilraum?

Aufgabe 12. Seien $X = \mathbb{R}^2$ und $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

(a) Es seien p_A das Minkowski-Funktional von A, $L = \mathbb{R} \times \{0\}$ und $f : L \to \mathbb{R}$, $f(x, 0) := x$. Zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass der Satz von Hahn-Banach falsch ist, falls p den Wert $+\infty$ annimmt.

(b) Es sei $B = \{(1, 0)\}$. Zeigen Sie, dass sich die konvexen Mengen A und B nicht strikt trennen lassen, d.h. es gibt kein lineares Funktional φ auf $\mathbb{R}^2$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$\forall\, a \in A, b \in B : \varphi(b) \leq t < \varphi(a).$$

Aufgabe 13.

Sei $H(\mathbb{C}) = C^1(\mathbb{C})$ der Raum aller *ganzen Funktionen* versehen mit den Halbnormen $p_n(f) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq n\}$. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $e_\lambda(z) = \exp(\lambda z)$. Zeigen Sie für jede nicht-leere offene Menge $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$, dass $L = \operatorname{span}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dicht in $H(\mathbb{C})$ ist (d.h. $\overline{L} = H(\mathbb{C})$).

Hinweis: Approximationskriterium. Für $\varphi \in H(\mathbb{C})'$ mit $\varphi|_L = 0$ betrachte man $g(\lambda) = \varphi(e_\lambda)$, benutze den Eindeutigkeitssatz und berechne $g^{(n)}(\lambda) = \varphi(z \mapsto z^n e^{\lambda z})$.