J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 3

Besprechung in der Übung am 17. November, 8:30 in E44

Aufgabe 8. Zeigen Sie für einen halbnormierten Raum$(X, \|\cdot\|)$ folgende Aussagen:

(a) X' ist versehen mit $\|\varphi\|' = \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ ein Banach-Raum.

(b) Für jedes $x \in X$ gibt es ein $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\|' \leq 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$.

(c) Bezeichent δ_x für $x \in X$ die Auswertung $X' \to \mathbb{K}$, $\varphi \mapsto \varphi(x)$, so ist durch

$$J : (X, \|\cdot\|) \to (X'', \|\cdot\|''),\ x \mapsto \delta_x$$

eine lineare Isometrie definiert mit $\text{Kern}(J) = \{x \in X : \|x\| = 0\}$.

Aufgabe 9. Zeigen Sie für jede konvexe Funktion $p : X \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Vektorraum dass

$$p(x) = \max\{f(x) : f \text{ affin-linear}, f \leq p\} \text{ gilt.}$$

Aufgabe 10. Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein stetiges, lineares $\ell : \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt

(1) $\ell(Tx) = \ell(x)$ für alle $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, wobei

$$T : \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \ell_\infty(\mathbb{N}), x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_2, x_3, \ldots).$$

(2) $\ell(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Man betrachte $p(x) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, L = \{x - T(x) : x \in \ell_\infty\}$ und zeige, dass das Nullfunktional auf L durch p dominiert ist, wobei die Ungleichungen $p(y) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$ nützlich sind.