J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 2

Besprechung in der Übung am 10. November, 8:30 in E44

Aufgabe 5

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ zwei Banach-Räume.

(a) Zeigen Sie, dass $X \times Y$ versehen mit der Norm $\|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ wiederum ein Banach-Raum ist.

(b) Für $L \sqsubseteq X$ und die Einschränkung $\|\cdot\|_L$ von $\|\cdot\|_X$ auf L ist $(L, \|\cdot\|_L)$ genau dann ein Banach-Raum, wenn L abgeschlossen ist.

(c) Seinen Z ein Vektorraum und $i : Z \to X$ eine lineare Abbildung, so dass $i(Z)$ in X abgeschlossen ist. Dann ist durch $\|z\|_Z = \|i(z)\|_X$ eine vollständige Halbnorm definiert. Ist außerdem i injektiv, so ist $(Z.\|\cdot\|_Z)$ wieder ein Banach-Raum.

(d) Denken Sie erneut über Aufgabe 1 nach.

Aufgabe 6

Es sei $T : (\ell_1, \|\cdot\|_1) \to (\ell_2, \|\cdot\|_2), T(x) = x$. Zeigen Sie, dass T eine wohldefinierte, stetige lineare Abbildung ist mit

$$\forall\, y \in \ell_2, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in \ell_1 : \ \|T(x) - y\|_2 < \varepsilon$$

aber dass T nicht surjektiv ist. Ist dies ein Widerspruch zum Satz 1.3 der Vorlesung?

Aufgabe 7

(a) Es sei $(X, \mathscr{P})$ ein lokalkonvexer Raum mit abzählbarem $\mathscr{P} = \{p_m : \ m \in \mathbb{N}\}$. Dann existiert für alle $A \subset X$ und $x \in \overline{A}$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ mit $a_n \to x$ (d.h. $\lim_{n\to\infty} p(x_n - a) = 0$ für alle $p \in \mathscr{P}$).

(b) Seien $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \text{ Abbildung}\}$, und für $E \subseteq \mathbb{R}$ endlich seien

$$p_E(f) := \max\{|f(t)| : \ t \in E\}$$

sowie $\mathscr{P} := \{p_E : \ E \subseteq \mathbb{R} \text{ endlich}\}$.

Zeigen Sie für $A = \{f \in X : \ \{t \in \mathbb{R} : \ f(t) \neq 0\} \text{ abzählbar}\}$, dass $\overline{A} = X$ gilt aber keine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ existiert mit $f_n \to \exp$.