J. Wengenroth WS 2015/16

Übungen zu Funktionalanalysis

Blatt 1

Besprechung in der Übung am 3. November, 8:30 in E44

Aufgabe 1

Es sei $C^1([a,b])$ versehen mit der Norm

$$\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{1,\infty})$ ein Banach-Raum ist. Man zeige ferner, dass die Norm

$$\|f\|_{(a),\infty} := |f(a)| + \|f'\|_\infty$$

äquivalent ist zur Norm $\|\cdot\|_{1,\infty}$, d.h. dass gilt

$$\exists\, C > 0\ \forall\, f \in C^1([a,b]) :\ \frac{1}{C}\|f\|_{(a),\infty} \le \|f\|_{1,\infty} \le C\|f\|_{(a),\infty}.$$

Aufgabe 2

Es seien M eine Menge, $X \sqsubseteq \mathbb{K}^M$ ein Unterraum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so dass

- $|f(t)| \le \|f\|$ für alle $f \in X$ und $t \in M$,
- Für alle $f_n \in B = \{f \in X :\ \|f\| \le 1\}$ und $f \in \mathbb{K}^M$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ für alle $t \in M$ gilt $f \in B$.

Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 3

Für $1 \le p < \infty$ sei

$$\ell_p := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} :\ \|x\|_p := (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

(a) Zeigen Sie z.B. mit Aufgabe 2, dass $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ ein Banach-Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \ell_p$ gilt

$$\|x\|_p = \sup\{|\sum_{k=1}^\infty x_k y_k| :\ y \in \ell_q, \|y\|_q \le 1\},$$

wobei $1 \le q \le \infty$ der zu p konjugierte Exponent ist, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(Tipp: Höldersche Ungleichung und $y_n := \begin{cases} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^{p-1} x_n} & , \text{ falls } x_n \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x_n = 0 \end{cases}$.)

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4

Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein halbnormierter Raum und $L \sqsubseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum.

(a) Man zeige, dass durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in L$ eine Äquivalenzrelation definiert ist.

(b) Für $x \in X$ bezeichne $[x] = x + L$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Zeigen Sie, dass durch

$$\|[x]\|_\sim := \inf\{\|x - \ell\| : \ \ell \in L\}$$

eine Norm auf dem Quotientenraum $X/L = \{[x] : \ x \in X\}$ definiert ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(X/L, \|\cdot\|_\sim)$ ein Banach-Raum ist, falls $(X, \|\cdot\|)$ vollständig ist.

(Tipp: Wir zeigen demnächst, dass es eine *Vervollständigung* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ von X/L gibt, also einen Banach-Raum zusammen mit einer längentreuen linearen Einbettung $i : X/L \to Y$ und $\overline{i(X/L)} = Y$. Verifizieren Sie die Voraussetzungen aus Satz 1.3 für $T = i \circ q : X \to Y$ mit der Quotientenabbildung q.)