J. Wengenroth
T. Kalmes WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 12

Abgabe: Dienstag 8.2. vor der Übung um 12:15 im E 44

Aufgabe 45 (5 Punkte)
Seien $K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $U_n \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $K \subseteq \bigcup_{n=1}^m U_n$. Zeigen Sie, dass es $\varphi_n \in \mathscr{D}(U_n)$ gibt mit $\varphi_n \geq 0$ und $\sum_{n=1}^m \varphi_n(x) = 1$ für alle $x \in K$.

Hinweis: Für jedes $x \in K$ wähle man $n(x) \in \{1, \ldots, m\}$ und $\varepsilon(x) > 0$ mit $B(x, \varepsilon(x)) \subseteq U_{n(x)}$ sowie $E \subseteq K$ endlich mit $K \subseteq \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon(x))$. Für jedes $n \in \{1, \ldots, m\}$ sind dann $K_n := \bigcup_{x \in E, n(x)=n} B(x, \varepsilon(x))$ kompakte Teilmengen von U_n mit $K \subseteq \bigcup_{n=1}^m K_n$. Man regularisiere I_{K_n}.

Aufgabe 46 (5 Punkte)
Für $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ und $x \in \mathbb{R}^d$ ist $\tau_x \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ mit $\tau_x \varphi(y) := \varphi(y - x)$. Für $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ sei $(\tau_x u)(\varphi) := u(\tau_{-x} \varphi)$. Zeigen Sie:

i) $\tau_x \delta_a = \delta_{x+a} = \delta_x * \delta_a$ für alle $a, x \in \mathbb{R}^d$.

ii) $\tau_x \circ \tau_y = \tau_{x+y}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$.

iii) $\tau_x \check{\varphi} = (\tau_{-x} \varphi)^\vee$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d$.

iv) $\tau_x(u * \varphi) = (\tau_x u) * \varphi = u * (\tau_x \varphi)$ für alle $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d), \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 47 (5 Punkte)
Es sei $T : \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d)$ linear und stetig, so dass $\tau_x \circ T = T \circ \tau_x$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ (d.h. $T(\varphi)(y - x) = T(y \mapsto \varphi(y - x))$ für alle x, y). Zeigen Sie, dass es ein $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ gibt mit $T(\varphi) = u * \varphi$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.

Hinweis: $T(\varphi)(x) = (\tau_{-x} \circ T)(\varphi)(0) = T(\tau_{-x} \varphi)(0)$.

Aufgabe 48 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass holomorphe Distributionen holomorphe Funktionen sind, d.h. für alle $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen) mit $\bar{\partial} u = 0$ ist $u \in C^1(\Omega)$ mit $\bar{\partial} u = 0$.