J. Wengenroth
T. Kalmes

WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 11

Abgabe: Dienstag 1.2. vor der Übung um 12:15 im E 44

Aufgabe 41 (5 Punkte)
Es seien $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ und $f \in \mathscr{E}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass durch

$$fu : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto u(f\varphi)$$

wieder eine Distribution definiert ist, für die $\partial^\alpha(fu) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} u$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ gilt.

Aufgabe 42 (5 Punkte)

i) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ erfülle $u' = 0$. Zeigen Sie, dass $u(\varphi) = c \int \varphi \, d\lambda_1$ für ein $c \in \mathbb{C}$ gilt.

ii) $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ erfülle $u' + au = f \in C(\mathbb{R})$ mit $a \in C^\infty(\mathbb{R})$. Zeigen Sie $u \in C^1(\mathbb{R})$ in dem Sinne, dass $g \in C^1(\mathbb{R})$ existiert mit $u(\varphi) = \int g\varphi \, d\lambda_1$.

Hinweis zu i): Man zeige $\operatorname{Kern} I \subseteq \operatorname{Kern} u$ für $I(\varphi) = \int \varphi \, d\lambda_1$ und verwende A 36 i).
Hinweis zu ii): Betrachten Sie zunächst den Fall $a = 0$ und benutzen Sie, dass f eine Stammfunktion besitzt. Für allgemeines a sei E eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $E' = Ea$. Betrachten Sie Eu.

Aufgabe 43 (5 Punkte)
Es sei $u \in C^1(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ und $v = u' I_{\mathbb{R}\backslash\{0\}}$ erfülle $vI_{[-1,1]} \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

i) $\lim_{x\to 0\pm} u(x)$ existieren.

ii) Zeigen Sie, dass $u \in \mathscr{L}_1^{loc}(\mathbb{R})$.

iii) $u' = v + (u(0+) - u(0-))\delta_0$.

Aufgabe 44 (5 Punkte)

i) Zeigen Sie, dass $f \in \mathscr{L}_1^{loc}(\mathbb{R})$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \log |x| (x \neq 0), f(0) = 0$.

ii) Für f wie in i) ist nach 3.2 d) durch $u_f : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto \int f\varphi \, d\lambda_1$ eine Distribution definiert. Zeigen Sie, dass $u_f'(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\{x\in\mathbb{R}:|x|>\varepsilon\}} \frac{\varphi(x)}{x} \, d\lambda_1(x)$.