J. Wengenroth
T. Kalmes WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 10

Abgabe: Dienstag 25.1. vor der Übung um 12:15 im E 44

Aufgabe 37 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass ein lokalkonvexer Raum $(X, \mathscr{P})$ genau dann halbnormiert (d.h. $\mathscr{P} \sim \{q\}$ für eine Halbnorm q) ist, wenn es eine beschränkte Kugel $U = B_p(0,1)$ für ein $p \in \mathscr{P}$ gibt.

Aufgabe 38 (5 Punkte)
Es seien $(X_n, \mathscr{P}_n)$ lokalkonvexe Räume über $\mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}$). Wir versehen $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ mit dem Halbnormensystem $\mathscr{Q}$ aller Halbnormen der Form

$$q((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \max\{p_1(x_1), \ldots, p_N(x_N)\},$$

wobei $p_j \in \mathscr{P}_j$ und $N \in \mathbb{N}$. Dann ist $(X, \mathscr{Q})$ ein lokalkonvexer Raum.
Zeigen Sie, dass $B \subseteq X$ genau dann $\mathscr{Q}$-beschränkt ist, wenn es eine Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathscr{P}_n$-beschränkten Mengen $B_n \subseteq X_n$ gibt mit $B \subseteq \Pi_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Aufgabe 39 (5 Punkte)

i) Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $B \subseteq X'$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) B ist $\|\cdot\|'$-beschränkt.

   (b) B ist $\sigma(X', X)$-beschränkt.

ii) Es sei $X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : x_n = 0\}$ versehen mit der Norm $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$. Zeigen Sie, dass $B := \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X'$ mit $\varphi_n(x) := n x_n$ unbeschränkt in $(X', \|\cdot\|_1')$ ist aber $\sigma(X', X)$-beschränkt.

Hinweis zu i) "(b)$\Rightarrow$(a)": Banach-Steinhaus

Aufgabe 40 (5 Punkte)
Es sei $(X, \mathscr{P})$ ein lokalkonvexer Raum. Für jedes $B \in \mathscr{B}(X, \mathscr{P})$ ist durch

$$q_B(\varphi) = \sup\{|\varphi(x)| : x \in B\}$$

eine Halbnorm $q_B : X' \to [0, \infty)$ definiert. Dann sei $\beta(X', X) := \{q_B : B \in \mathscr{B}(X, \mathscr{P})\}$. Offenbar ist $(X', \beta(X', X))$ ein lokalkonvexer Raum.
Zeigen Sie: Hat $(X, \mathscr{P})$ die Eigenschaft, dass eine lineare Abbildung $T : X \to (Y, \mathscr{Q})$ in einen lokalkonvexen Raum $(Y, \mathscr{Q})$ genau dann stetig ist, wenn sie auf beschränkten Mengen beschränkt ist (so ein $(X, \mathscr{P})$ nennt man *bornologisch*), so ist $(X', \beta(X', X))$ folgenvollständig.