J. Wengenroth
T. Kalmes WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 9

Abgabe: Dienstag 18.1. vor der Übung um 12:15 im E 44

Aufgabe 33 (5 Punkte)

i) Konstruieren Sie ein unstetiges, lineares Funktional $f : \ell_1 \to \mathbb{R}$.

ii) Für f wie in i) definiere man $|||x||| := \|x\|_1 + |f(x)|$, $(x \in \ell_1)$. Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ eine Norm auf ℓ_1 ist.

iii) Zeigen Sie, dass $id : (\ell_1, |||\cdot|||) \to (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ stetig aber nicht offen ist. Ist $(\ell_1, |||\cdot|||)$ ein Banach-Raum?

Hinweis zu i): Seien $L := \{y \in \ell_1 : \{n \in \mathbb{N} : y_n \neq 0\} \text{ endlich}\}$ und $x \in \ell_1 \backslash L$. Definiere $\varphi : \{y + tx : y \in L, t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}, y + tx \mapsto t$ und setze mit dem Zornschen Lemma fort.

Aufgabe 34 (5 Punkte)

Seien X ein separabler Banach-Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}} = B(0,1)$. Zeigen Sie, dass

$$T : \ell_1 \to X, (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$$

eine wohldefinierte, lineare, stetige und offene Abbildung ist.
Hinweis: Surjektivitätskriterium, $T^t : X' \to \ell_1' \cong \ell_\infty, \varphi \mapsto (\varphi(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ (siehe auch 1.7 d)).

Aufgabe 35 (5 Punkte)

Es sei $J : c_0 \to \ell_1'$ definiert durch $J(y)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Zeigen Sie, dass $J(c_0)$ in $(\ell_1', \|\cdot\|_1')$ abgeschlossen ist aber nicht in $(\ell_1', \sigma(\ell_1', \ell_1))$.

Aufgabe 36 (5 Punkte)

i) Es seien Y ein Vektorraum und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi : Y \to \mathbb{K}$ linear mit $\mathrm{Kern}\psi \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Kern}\varphi_i$. Zeigen Sie $\psi \in \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_n \rangle$.

ii) Verwenden Sie i) für den lokalkonvexen Raum $(X', \sigma(X', X))$, um zu zeigen, dass $(X', \sigma(X', X))' = \{\delta_x : x \in X\}$, wobei $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$.

Hinweis zu i): Zeige, dass durch $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \mapsto \psi(x)$ ein lineares Funktional auf einem Teilraum von $\mathbb{K}^n$ definiert ist. Setze linear fort und stelle dar.