J. Wengenroth
T. Kalmes

WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 8

Abgabe: Dienstag 11.1. vor der Übung um 12:15 im E 44

Aufgabe 29 (5 Punkte)
Für $A = (a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}} \in (0,\infty)^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ mit $a_{n.k} \leq a_{n+1,k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}$ ist

$$\lambda(A) := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}|x_k| < \infty \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

offensichtlich ein Vektorraum. Zeigen Sie, dass $\lambda(A)$ versehen mit den Halbnormen $p_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}|x_k|, n \in \mathbb{N}$, ein Fréchet-Raum ist.

Aufgabe 30 (5 Punkte)
Für $a_{n,k} := n^k$ und $b_{n,k} := (1 - \frac{1}{n})^k$ $(n, k \in \mathbb{N})$ zeige man, dass $T_{\mathbb{C}} : H(\mathbb{C}) \to \lambda(A)$ und $T_{\mathbb{D}} : H(\mathbb{D}) \to \lambda(B)$, jeweils definiert durch $f \mapsto (\frac{f^{(k-1)}(0)}{(k-1)!})_{k\in\mathbb{N}}$, Isomorphismen sind, d.h. lineare, bijektive, stetige Abbildungen mit stetigen Inversen.

Aufgabe 31 (5 Punkte)
Es seien $(X, \mathscr{P})$ und $(Y, \mathscr{Q})$ lokalkonvexe Räume sowie $T : X \to Y$ linear.

i) Zeigen Sie, dass die Stetigkeit von $T : (X, \mathscr{P}) \to (Y, \mathscr{Q})$ die Stetigkeit von $T : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ impliziert.

ii) Sind $(X, \mathscr{P})$ und $(Y, \mathscr{Q})$ Fréchet-Räume, so zeige man, dass $T : (X, \mathscr{P}) \to (Y, \mathscr{Q})$ stetig ist, falls $T : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ stetig ist.

iii) Zeigen Sie anhand eines sehr einfachen Beispiels, dass im allgemeinen die Stetigkeit von $T : (X, \mathscr{P}) \to (Y, \mathscr{Q})$ nicht aus der von $T : (X, \sigma(X, X')) \to (Y, \sigma(Y, Y'))$ folgt.

Hinweis: Aufgabe 13.

Aufgabe 32 (5 Punkte)

i) Es seien (X, d_X) ein halbmetrischer Raum, (Y, d_Y) ein kompakter metrischer Raum und $f : X \to Y$ eine Abbildung mit abgeschlossenem Graphen. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

ii) Geben Sie ein Beispiel einer unstetigen Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, deren Graph abgeschlossen ist.

Wir wünschen schöne Weihnachtstage und einen guten Start ins neue Jahr!