J. Wengenroth
T. Kalmes

WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 7

Abgabe: Dienstag 21.12. vor der Übung um 12:15 im E 44

Aufgabe 25 (5 Punkte)
Bekanntlich ist $H(\mathbb{C})$ versehen mit $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Fréchet-Raum, wobei

$$\forall\, f \in H(\mathbb{C}) :\ p_n(f) = \sup\{|f(z)| :\ |z| \leq n\}.$$

Wie im Fall von $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist auch $H(\mathbb{C})$ versehen mit $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein Fréchet-Raum, wobei

$$\forall\, f \in H(\mathbb{C}) :\ q_n(f) = \sup\{|f^{(k)}(z)| :\ k \leq n, |z| \leq n\}.$$

Zeigen Sie (ohne Rechnung!) $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \sim \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ und folgern Sie, dass für eine lokal (d.h. auf allen kompakten Teilmengen) gleichmäßig konvergente Folge ganzer Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch alle Ableitungen lokal gleichmäßig konvergieren.

Aufgabe 26 (5 Punkte)
Es seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ linear und stetig. Zeigen Sie, dass dann auch $T^t : (Y', \|\cdot\|'_Y) \to (X', \|\cdot\|'_X)$ stetig ist.

Aufgabe 27 (5 Punkte)
Für einen lokalkonvexen Raum $(X, \mathscr{P})$ betrachtet man die gerichtete Familie von Halbnormen $\sigma(X', X) = \{\pi_E :\ E \subseteq X \text{ endlich}\}$ auf X', wobei

$$\pi_E(\varphi) := \max\{|\varphi(x)| :\ x \in E\} \text{ für } \varphi \in X'.$$

i) Zeigen Sie für eine stetige, lineare Abbildung $T : (X, \mathscr{P}) \to (Y, \mathscr{Q})$ zwischen lokalkonvexen Räumen, dass $T^t : (Y', \sigma(Y', Y)) \to (X', \sigma(X', X))$ stetig ist.

ii) Zeigen Sie für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$, dass immer $\sigma(X', X) \prec \|\cdot\|'_X$ gilt und dass $\|\cdot\|'_X \prec \sigma(X', X)$ genau dann gilt, wenn X endlichdimensional ist.

Aufgabe 28 (5 Punkte)
Es sei $(X, \mathscr{P} = \{p_n :\ n \in \mathbb{N}\})$ ein unendlichdimensionaler Fréchet-Raum mit $p_n \leq p_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau dann eine surjektive, stetige, lineare Abbildung $T : X \to \omega$ gibt, wenn kein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathscr{P} \sim p_n$.

Hinweis: Satz von Eidelheit. Falls $p_{n-1} \nsim p_n$ finde man $\varphi_n \in (X, p_n)' \backslash (X, p_{n-1})'$, indem man zunächst zeigt, dass $(X, p_{n-1})' \to (X, p_n)', \varphi \mapsto \varphi$ wohldefiniert, linear, stetig und injektiv ist und beachtet, dass A 14 auch für halbnormierte Räume (X, p_{n-1}) bzw. (X, p_n) gilt.