J. Wengenroth
T. Kalmes WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 6

Abgabe: Dienstag 14.12. vor der Übung um 12:15 im E 44

Aufgabe 21 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass für $|\lambda| > 1$ der Operator

$$T : \ell_2 \to \ell_2, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\lambda x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

hyperzyklisch ist.

Aufgabe 22 (5 Punkte)
Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum. Eine Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *Basis*, falls es zu jedem $x \in X$ eine eindeutige Folge $(\xi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ gibt, so dass $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \xi_j(x) e_j$. Zeigen Sie, dass jeder normierte Raum, der eine Basis besitzt, separabel ist und, dass die *Koeffizientenfunktionale*

$$\xi_n : X \to \mathbb{K}, x = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j(x) e_j \mapsto \xi_n(x)$$

linear sind. Zeigen Sie, dass ℓ_p für $1 \leq p < \infty$ eine Basis hat aber ℓ_∞ nicht.

Hinweis: Für verschiedene $A, B \subseteq \mathbb{N}$ gilt $\|\delta_A - \delta_B\|_\infty = 1$, wobei $\delta_{A,n} = \begin{cases} 1 & , \quad n \in A \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$
Zeigen Sie damit, dass ℓ_∞ nicht separabel ist.

Aufgabe 23 (5 Punkte)
Eine Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|_X)$ heißt *Schauder-Basis*, falls alle zugehörigen Koeffizientenfunktionale stetig sind.

Zeigen Sie für eine Basis $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$:

a) $F := \{(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\, (\sum_{n=1}^{k} \xi_n e_n)_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } (X, \|\cdot\|_X)\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ auf dem durch $\|(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sup\{\|\sum_{n=1}^{k} \xi_n e_n\|;\, k \in \mathbb{N}\}$ eine Norm definiert ist.

b) $A : (F, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_X), (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ ist linear, stetig und bijektiv.

c) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\gamma_k : (F, \|\cdot\|) \to \mathbb{K}, (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \xi_k$ linear und stetig.

d) Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, so ist auch $(F, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum.

e) Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum, so ist jede Basis eine Schauder-Basis.

Hinweis zu e): Isomorphiesatz von Banach und d).

Aufgabe 24 (5 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\varphi = \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell_2$ und $\ell_1 \subseteq \ell_2$ jeweils versehen mit der ℓ_2-Norm $\|\cdot\|_2$ von erster Kategorie in sich selbst sind.