

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 5

Abgabe: 7.12. vor der Übung

Aufgabe 17 (5 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. $x \in X$ heißt *isolierter Punkt*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B(x, \varepsilon) = \{x\}$. $M \subseteq X$ heißt G_δ -Menge, wenn es eine Folge offener Mengen $M_n \subseteq X, n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass $M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n$.

- a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Baire, dass eine dichte, abzählbare Teilmenge M eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) ohne isolierte Punkte keine G_δ -Menge sein kann.
- b) Es sei f eine reellwertige Funktion auf X . Für $\emptyset \neq M \subseteq X$ definieren wir $\omega(M) := \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x)$, wobei $\infty - (-\infty) = \infty$. Dann gilt für $M_1 \subseteq M_2 \subseteq X$ offenbar $0 \leq \omega(M_1) \leq \omega(M_2)$, so dass

$$\omega : X \rightarrow [0, \infty], x \mapsto \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(B(x, \delta))$$

wohldefiniert ist. Zeigen Sie, dass $\{x \in X : \omega(x) < \varepsilon\}$ offen ist für jedes $\varepsilon > 0$ und dass $\omega(x) = 0$ genau dann gilt, wenn f stetig in x ist.

- c) Es sei (X, d) vollständig und ohne isolierte Punkte und $M \subseteq X$ abzählbar und dicht. Zeigen Sie, dass es keine reellwertige Funktion f auf X gibt, die in M stetig und in $X \setminus M$ unstetig ist. Insbesondere folgt also, dass es keine reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ gibt, die in $\mathbb{Q}$ stetig und in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ unstetig ist.

Aufgabe 18 (5 Punkte)

Man beweise:

- a) Jeder Teilraum eines lokalkonvexen Raums, der einen inneren Punkt enthält, stimmt schon mit dem gesamten Raum überein.
- b) Besitzt ein Banach-Raum eine abzählbare algebraische Basis, so ist er schon endlichdimensional.
- c) Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen sei

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \subseteq \Omega \text{ kompakt}\},$$

wobei $\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^d}$. Weiter sei $\mathcal{P}$ eine gerichtete Familie von Halbnormen auf dem Vektorraum $\mathcal{D}(\Omega)$, so dass auf dem lokalkonvexen Raum $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{P})$ für jedes $x \in \Omega$ das lineare Funktional

$$\delta_x : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto \varphi(x)$$

stetig ist. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{P})$ kein Fréchet-Raum ist.

Hinweis zu b) und c): Satz von Baire

Bitte wenden!

Aufgabe 19 (5 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{P})$ ein Fréchet-Raum und $(Y, \mathcal{Q})$ ein lokalkonvexer Raum über $\mathbb{K}$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $T_n : (X, \mathcal{P}) \rightarrow (Y, \mathcal{Q})$ linear und stetig, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$ für jedes $x \in X$ existiert. Zeigen Sie, dass

$$T : (X, \mathcal{P}) \rightarrow (Y, \mathcal{Q}), x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$$

linear und stetig ist.

Hinweis: Satz von Banach-Steinhaus.

Aufgabe 20 (5 Punkte)

Es seien $(X, \mathcal{P})$ ein Fréchet-Raum, $(Y, \mathcal{Q})$ ein metrisierbarer, lokalkonvexer Raum und $(Z, \mathcal{R})$ ein lokalkonvexer Raum über $\mathbb{K}$, sowie $B : X \times Y \rightarrow Z$ bilinear und getrennt stetig, d.h. für alle $x_0 \in X, y_0 \in Y$ sind die Abbildungen

$$B^{y_0} : (X, \mathcal{P}) \rightarrow (Z, \mathcal{R}), B^{y_0}(x) := B(x, y_0)$$

und

$$B_{x_0} : (Y, \mathcal{Q}) \rightarrow (Z, \mathcal{R}), B_{x_0}(y) := B(x_0, y)$$

linear und stetig. Zeigen Sie, dass B stetig ist als Abbildung von $(X \times Y, \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})$ nach $(Z, \mathcal{R})$ (s. Aufgabe 10 zur Definition von $(X \times Y, \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})$).

Beachten Sie hierbei, dass nach Satz 2.2 $(X \times Y, \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q})$ metrisierbar ist, so dass die Stetigkeit von B äquivalent ist zur Folgenstetigkeit. Zeigen Sie zunächst durch einen Widerspruchsbeweis, dass B stetig in $(0, 0)$ ist, indem Sie für eine Nullfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(Y, \mathcal{Q})$ die Folge der stetigen, linearen Operatoren $(B^{y_n})_{n \in \mathbb{N}}$ betrachten und den Satz von Banach-Steinhaus anwenden.

**Ab dem 7.12. finden die Übungen wieder dienstags,
12-14 Uhr in E 44 statt!**