

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 4

Abgabe: 1.12. vor der Übung

Aufgabe 13 (5 Punkte)

Es sei $(X, \mathcal{P})$ ein lokalkonvexer Raum. Für $E \subseteq (X, \mathcal{P})'$ endlich seien

$$r_E(x) := \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E\}, \quad x \in X,$$

und

$$\sigma(X, X') := \{r_E : E \subseteq (X, \mathcal{P})' \text{ endlich}\}.$$

Dann ist $(X, \sigma(X, X'))$ ein lokalkonvexer Raum.

Zeigen Sie, dass $(X, \sigma(X, X'))' = (X, \mathcal{P})'$ und dass konvexe Mengen gleiche Abschlüsse in $(X, \sigma(X, X'))$ und $(X, \mathcal{P})$ haben. Zeigen Sie weiter, dass ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ mit $\|\cdot\| \sim \sigma(X, X')$ endlichdimensional ist.

Aufgabe 14 (5 Punkte)

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

i) Zeigen Sie, dass durch $\|\varphi\|' := \sup\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\}$ eine vollständige Norm auf X' definiert ist.

ii) Es sei

$$\Phi : X \rightarrow (X', \|\cdot\|'), x \mapsto \delta_x$$

mit $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$. Zeigen Sie, dass Φ linear und injektiv ist mit $\|x\| = \|\Phi(x)\|'$ für alle $x \in X$. Folgern Sie daraus erneut, dass jeder normierte Raum eine Vollständigkeit besitzt.

Hinweis zu ii): Aufgabe 11.

Aufgabe 15 (5 Punkte)

Es sei $B \subseteq C[0, 1]$ konvex und $f \in C[0, 1]$, so dass es eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) \text{ für alle } t \in [0, 1] \text{ und } \sup\{|f_n(t)| : t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Zeigen Sie, dass es dann eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in B gibt mit $g_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $[0, 1]$.

Hinweis: Trennungssatz, Rieszscher Darstellungssatz 1.7 (g) und man verwende, dass das dort angegebene Maß μ endlich ist.

Für einen selbstgefundenen „elementaren“ Beweis, der keine Ergebnisse unserer Vorlesung benutzt gibt es 100 Sonderpunkte und eine Flasche Champagner!

Bitte wenden!

Aufgabe 16 (5 Punkte)

Es seien $\overline{X} = \mathbb{R}^2$ und $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \cup \{(0, 0)\}$.

- i) Es seien p_A das Minkowski-Funktional von A , $L = \mathbb{R} \times \{0\}$ und $f : L \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, 0) := x$. Zeigen Sie anhand dieses Beispiels, dass der Satz von Hahn-Banach falsch ist, falls p den Wert $+\infty$ annimmt.
- ii) Es sei $B = \{(1, 0)\}$. Zeigen Sie, dass sich die konvexen Mengen A und B nicht trennen lassen, d.h. es gibt kein lineares Funktional φ auf $\mathbb{R}^2$ mit $t \in \mathbb{R}$ und

$$\forall a \in A, b \in B : \varphi(b) \leq t < \varphi(a).$$