J. Wengenroth
T. Kalmes

WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 3

Abgabe: 23.11. vor der Übung

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Für einen lokalkonvexen Raum $(X, \mathscr{P})$ und Unterräume $L \subset X$, $P \subset X'$ seien

$$L^{\perp} := \{\varphi \in X' : \varphi|_L = 0\} \text{ und } P^{\sharp} := \{x \in X : \varphi(x) = 0 \text{ für alle } \varphi \in P\}.$$

Zeigen Sie:

a) $L \subset L^{\perp\sharp}$ und $P \subset P^{\sharp\perp}$

b) $L^{\perp} = L^{\perp\sharp\perp}$

c) $L^{\perp} = \overline{L}^{\perp}$

d) $\overline{L} = L^{\perp\sharp}$.

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Es seien $(X, \mathscr{P})$ und $(Y, \mathcal{Q})$ lokalkonvexe Räume über $\mathbb{K}$. Dann ist für $p \in \mathscr{P}, q \in \mathcal{Q}$ durch

$$p \oplus q(x, y) := p(x) + q(y)$$

eine Halbnorm auf $X \times Y$ definiert und $\mathscr{P} \oplus \mathcal{Q} := \{p \oplus q : p \in \mathscr{P}, q \in \mathcal{Q}\}$ macht $X \times Y$ zu einem lokalkonvexen Raum.

Zeigen Sie für jedes $\Phi \in (X \times Y, \mathscr{P} \oplus \mathcal{Q})'$, dass es $\varphi \in (X, \mathscr{P})'$ und $\psi \in (Y, \mathcal{Q})'$ gibt mit

$$\forall (x, y) \in X \times Y : \Phi(x, y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Aufgabe 11 (5 Punkte)

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Banach-Hahn, dass für jedes $x \in X$ die Normformel

$$\|x\|_X = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in X', \|\varphi\|' \leq 1\}$$

gilt, wobei $\|\varphi\|' := \sup\{|\varphi(y)| : y \in X, \|y\|_X \leq 1\}$.

Bitte wenden!

Bearbeiten Sie EINE der folgenden Aufgaben:

Aufgabe 12 A (5 Punkte)
Es sei $H(\mathbb{C})$ der Raum der ganzen Funktionen versehen mit den Halbnormen

$$p_n(f) := \sup\{|f(z)| : |z| \leq n\}.$$

Dann ist $(H(\mathbb{C}), \{p_n : n \in \mathbb{N}\})$ ein lokalkonvexer Raum. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$e_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(\lambda z).$$

Zeigen Sie, dass für jede Teilmenge $\Lambda \subset \mathbb{C}$ mit Häufungspunkt die lineare Hülle von $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ dicht ist.
Hinweis: Für $\varphi \in (H(\mathbb{C}), \{p_n : n \in \mathbb{N}\})'$ definiere man $g(\lambda) := \varphi(e_\lambda), \lambda \in \mathbb{C}$ und rechne nach, dass g holomorph ist mit $g^{(n)}(\lambda) = \varphi(z \mapsto z^n \exp(\lambda z))$. Der Eindeutigkeitssatz liefert $g = 0$, falls $g|_\Lambda = 0$, also $\varphi(z \mapsto z^n) = g^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 12 B (5 Punkte)
Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es ein stetiges, lineares $\ell : \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt

i) $\ell(Tx) = \ell(x)$ für alle $x \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, wobei

$$T : \ell_\infty(\mathbb{N}) \to \ell_\infty(\mathbb{N}), x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_2, x_3, \ldots).$$

ii) $\ell(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Man betrachte $p(x) = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, L = \{x - T(x) : x \in \ell_\infty\}$ und zeige, dass das Nullfunktional auf L durch p dominiert ist, wobei die Ungleichungen $p(y) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k$ nützlich sind.