J. Wengenroth
T. Kalmes

WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 2
Abgabe: 16.11. vor der Übung

Aufgabe 5 (5 Punkte)
Es seien $1 < p < \infty$ und $\ell_p = \{x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} :\ \|x\|_p = (\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p)^{1/p} < \infty\}$. Zeigen Sie, dass jedes $\varphi \in (\ell_p, \|\cdot\|_p)'$ von der Form

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

ist mit $y \in \ell_q$, wobei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

i) Es sei $(X, \mathscr{P})$ ein lokalkonvexer Raum mit abzählbarem $\mathscr{P} = \{p_m :\ m \in \mathbb{N}\}$. Dann existiert für alle $A \subset X$ und $x \in \bar{A}$ eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ mit $a_n \to x$, d.h. $\lim_{n\to\infty} p(x_n - a) = 0$ für alle $p \in \mathscr{P}$.

ii) Seien $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \text{ Abbildung}\}$, und für $E \subset \mathbb{R}$ endlich sei

$$p_E(f) := \max\{|f(t)| :\ t \in E\}$$

sowie $\mathscr{P} := \{p_E :\ E \subset \mathbb{R} \text{ endlich}\}$.

Zeigen Sie für $A = \{f \in X :\ \{t \in \mathbb{R} :\ f(t) \neq 0\} \text{ abzählbar}\}$, dass $\bar{A} = X$ gilt aber keine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ existiert mit $f_n \to \exp$.

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Es sei $T : (\ell_1, \|\cdot\|_1) \to (\ell_2, \|\cdot\|_2), T(x) = x$. Zeigen Sie, dass T eine wohldefinierte, stetige lineare Abbildung ist mit

$$\forall\, y \in \ell_2, \varepsilon > 0\, \exists\, x \in \ell_1 :\ \|T(x) - y\|_2 < \varepsilon$$

aber dass T nicht surjektiv ist. Ist dies ein Widerspruch zum Satz 1.3 der Vorlesung?

Aufgabe 8 (5 Punkte)
Ist $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum, so ist bekanntlich eine Vervollständigung von $(X, \|\cdot\|_X)$ gegeben durch den zu $(\mathcal{CF}(X), |||\cdot|||)$ assoziierten normierten Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$, wobei

$$\mathcal{CF}(X) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} :\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge}\}$$

und $|||(x_n)_{n\in\mathbb{N}}||| = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_X$.
Es sei $(Z, \|\cdot\|_Z)$ eine weitere Vervollständigung von $(X, \|\cdot\|_X)$. Zeigen Sie, dass eine bijektive, lineare Isometrie $Y \to Z$ existiert und folgern Sie daraus, dass je zwei Vervollständigungen von $(X, \|\cdot\|_X)$ isometrisch isomorph sind.