J. Wengenroth
T. Kalmes WS 10/11

Übungen zu **Funktionalanalysis und partielle Differentialgleichungen**

Blatt 1
Abgabe: 9.11. vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es sei $C^1([a,b])$ versehen mit der Norm

$$\|f\|_{1,\infty} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{1,\infty})$ ein Banach-Raum ist. Man zeige ferner, dass die Norm

$$\|f\|_{(a),\infty} := |f(a)| + \|f'\|_\infty$$

äquivalent ist zur Norm $\|\cdot\|_{1,\infty}$, d.h. dass gilt

$$\exists\, C > 0\ \forall\, f \in C^1([a,b]):\ \frac{1}{C}\|f\|_{(a),\infty} \leq \|f\|_{1,\infty} \leq C\|f\|_{(a),\infty}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Es seien M eine Menge, $X \subset \mathbb{K}^M$ ein Unterraum und $\|\cdot\|$ eine Norm auf X, so dass

- $\forall\, f \in X, t \in M : |f(t)| \leq \|f\|$
- Wann immer $f_n \in B := \{f \in X : \ \|f\| \leq 1\}, n \in \mathbb{N}$, und $f \in \mathbb{K}^M$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ für alle $t \in M$, so folgt $f \in B$.

Zeigen Sie, dass $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\ell_p := \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} :\ \|x\|_p := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\}.$$

i) Zeigen Sie z.B. mit A 2, dass $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ ein Banach-Raum ist.

ii) Zeigen Sie, dass für alle $x \in \ell_p$ gilt

$$\|x\|_p = \sup\{|\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k| :\ y \in \ell_q, \|y\|_q \leq 1\},$$

wobei $1 \leq q \leq \infty$ der zu p konjugierte Exponent ist, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(Tipp: Höldersche Ungleichung und $y_n := \begin{cases} \frac{|x_n|^p}{\|x\|_p^{p-1} x_n} & \text{, falls } x_n \neq 0 \\ 0 & \text{, falls } x_n = 0 \end{cases}$ für $x \neq 0$.)

(Bitte wenden!)

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Es seien $(X, \|\cdot\|)$ ein halbnormierter Raum und $L \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum.

i) Man zeige, dass durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in L$ eine Äquivalenzrelation definiert ist.

ii) Für $x \in X$ bezeichne $[x] = x + L$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Zeigen Sie, dass durch
$$\|[x]\|_{\sim} := \inf\{\|x - l\| : \; l \in L\}$$
eine Norm auf dem Quotientenraum $X/L = \{[x] : \; x \in X\}$ definiert ist.

iii) Zeigen Sie, dass $(X/L, \|\cdot\|_{\sim})$ ein Banach-Raum ist, falls $(X, \|\cdot\|)$ vollständig ist.

(Tipp: Seien Y eine Vervollständigung von X/L, $i : X/L \to Y$ die Einbettung sowie $q : X \to X/L, q(x) = [x]$ die Quotientenabbildung. Verifizieren Sie die Voraussetzungen aus Satz 1.3 für $T = i \circ q : X \to Y$.)