Université de Liège
Faculté des Sciences

Analyse fonctionnelle

Notes de cours

Année académique 2007/2008

J. Wengenroth

Table des matières

CHAPITRE 1

Convexité

1.1. Espaces semi-normés.

(a) Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Une application $\|\cdot\| : X \to [0, \infty[$ est une semi-norme si $\|ax\| = |a|\|x\|$ et $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in X$ et $a \in \mathbb{K}$. Si, en plus, $\|x\| = 0$ implique $x = 0$ on parle d'une (vraie) norme sur X.

(b) Voici quelques exemples que nous allons souvent rencontrer dans notre cours. Ω dénote un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et K une partie compacte de Ω.

- $X = \mathrm{C}(\Omega)$, $\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$.
- $X = \mathrm{C}^n(\Omega)$, $\|f\|_{n,K} = \max\{\|f^{(\alpha)}\|_K : |\alpha| \leq n\}$.
- $X = \mathbb{K}^n$, $p \in [1, \infty[$, $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}$.
- $X = \mathscr{L}_p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ pour un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$.
- $X = \mathbb{K}^n_m$, $\|A\|_{p,q} = \sup\{\|Ax\|_q : x \in \mathbb{K}^m, \|x\|_p \leq 1\}$.

(c) Chaque semi-norme donne une semi-métrique $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ et donc les notions topologiques usuelles (comme adhérence, intérieure, convergence, suite de Cauchy, continuité). La boule unitaire de centre 0 et dénotée par $B(0,1) = B_{\|\cdot\|}(0,1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$. Cette boule est convexe (i.e. $x, y \in B(0,1)$ et $t \in [0,1]$ impliquent $tx + (1-t)y = x + t(y-x) \in B(0,1)$) et cerclée (i.e. $x \in B(0,1)$ et $|a| \leq 1$ impliquent $ax \in B(0,1)$) et donc *absolument convexe*.

Le résultat suivant dit (en particulier) que la norme est uniquement caractérisée par sa boule unitaire.

1.2. Théorème (jauge de Minkowski).

Pour une partie convexe B d'un espace vectoriel X et $x \in X$ nous définissons

$$p_B(x) = \inf\{t > 0 : x \in tB\} \text{ avec } tB = \{tb : b \in B\} \text{ et } \inf \emptyset = \infty.$$

(a) $p_B(x+y) \leq p_B(x) + p_B(y)$.

(b) $p_B(ax) = ap_B(x)$ *pour tout* $a > 0$.

(c) $\{p_B < 1\} \subseteq B \subseteq \{p_B \leq 1\}$, *si* $0 \in B$.

(d) $p_B(ax) = |a| p_B(x)$ *pour tout* $a \in \mathbb{K}$ *si* B *est absolument convexe et non-vide.*

(e) Si B est absolument convexe, p_B est une semi-norme sur l'enveloppe linéaire $\rangle B \langle$.

Démonstration. (a) Vu la définition de la borne inférieur il suffit de démontrer que $x \in sB$ et $y \in tB$, $s, t > 0$ impliquent $x + y \in (s + t)B$. Soient donc $a, b \in B$ tels que $x = sa$ et $y = tb$. Comme B est convexe nous obtenons

$$x + y = (s + t) \left(\frac{s}{s + t} a + \frac{t}{s + t} b \right) \in (s + t)B.$$

(b) résulte du fait que $ax \in tB \Leftrightarrow x \in \frac{t}{a} B$.

(c) Si $p_B(x) < 1$ il existe $0 < t < 1$ et $b \in B$ tel que $x = tb$. Comme $0 \in B$ cela donne $x = tb + (1 - t)0 \in B$. L'autre inclusion est immédiate.

(d) Comme B est cerclé nous avons $\lambda B = B$ pour tout $|\lambda| = 1$ et donc $p_B(\lambda x) = p_B(x)$. Si $a \neq 0$ et $\lambda = a/|a|$, le deuxième point implique

$$p_B(ax) = |a| p_B(\lambda x) = |a| p_B(x).$$

Le cas $a = 0$ résulte de $0 \in B$ et donc $p(0) = 0$.

(e) résulte de (a) et (d) car, pour tout $x = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k b_k \in \rangle B \langle$, on a $p_B(x) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k| p_B(b_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k| < \infty$. □

1.3. Théorème (Hahn-Banach).

Soient X un espace vectoriel et $p : X \to [0, \infty[$ tel que $p(ax) = ap(x)$ et $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tous $x, y \in X$ et $a > 0$. Soient L un sous-espace de X et $f : L \to \mathbb{K}$ linéaire tel que

$$\Re f(x) \leq p(x) \text{ pour tout } x \in L.$$

Alors, il existe un prolongement linéaire $F : X \to \mathbb{K}$ tel que

$$\Re F(x) \leq p(x) \text{ pour tout } x \in X.$$

Si p est une semi-norme nous avons même $|F(x)| \leq p(x)$ pour tout $x \in X$.

Démonstration. Démontrons d'abord le cas réel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) Soit $\mathfrak{M} = \big\{ (M, F) : L \sqsubseteq M \sqsubseteq X, F : M \to \mathbb{K}$ prolongement linéaire de f et $F(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in M \big\}$ muni de l'ordre (partiel) $(M, F) \preceq (N, G)$ si $M \sqsubseteq N$ et $G|_M = F$. Afin d'utiliser le lemme de Zorn nous vérifions que chaque partie $\{(M_i, F_i) : i \in I\}$ totalement ordonnée admet un majorant. En effet, l'union $M = \bigcup_{i \in I} M_i$ est un sous-espace de X parce que pour $x \in M_i$ et $y \in M_j$ nous avons $x, y \in M_k$ pour un indice $k \in \{i, j\}$ et donc chaque combinaison linéaire de x et y appartient à M. Un argument similaire montre que $F : M \to \mathbb{K}$, $x \mapsto F_i(x)$ si $x \in M_i$ est bien-définie et donc un prolongement linéaire de chaque F_i qui satisfait

$(M, F) \in \mathfrak{M}$. Le lemme de Zorn implique qu'il existe un élément maximale (M, F) de $\mathfrak{M}$.

(b) Supposons que $M \neq X$ et fixons $z \in X \setminus M$. Nous posons $N = \{x + az : x \in M, a \in \mathbb{R}\}$. Alors, $M \sqsubseteq N \sqsubseteq X$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons un prolongement linéaire G_λ de F défini par

$$G_\lambda(x + az) = F(x) + \lambda a.$$

Afin de trouver une contradiction il suffit de démontrer $(N, G_\lambda) \in \mathfrak{M}$ pour un réel λ. La linéarité de F et la sous-additivité de p impliquent

$$F(x) + F(y) = F(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x - z) + p(y + z)$$

et donc $F(x) - p(x - z) \leq p(y + z) - F(y)$. Passant aux bornes supérieure par rapport à x et inférieure par rapport à y nous obtenons $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tous $x, y \in X$,

$$(1) \quad F(x) \leq \lambda + p(x - z) \text{ et } (2) \quad F(y) \leq p(y + z) - \lambda.$$

Nous allons démontrer $G_\lambda(x + az) \leq p(x + az)$ pour tout $x + az \in N$. Si $a = 0$ cela est claire. Si $a > 0$ l'inégalité (2) pour $y = \frac{1}{a}x$ montre

$$G_\lambda(x + az) = a(F(y) + \lambda) \leq ap(y + z) = p(x + az).$$

De même, si $a < 0$ l'inégalité (1) pour $\tilde{x} = -\frac{1}{a}x$ montre

$$G_\lambda(x + az) = -a(F(\tilde{x}) - \lambda) \leq -ap(\tilde{x} - z) = p(x + az).$$

Nous avons donc démontré que $(N, G_\lambda) \in \mathfrak{M}$ et $(M, F) \preceq (N, G_\lambda)$ ce qui contredit le fait que (M, F) est maximale.

Pour démontrer le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ nous remarquons d'abord que chaque application $\mathbb{C}$-linéaire est évidemment $\mathbb{R}$-linéaire et que

$$g(x) = \Re g(x) + i\Im g(-i^2 x) = \Re g(x) - i\Re g(ix).$$

Alors, g est uniquement déterminé par sa partie réelle. Si d'autre part, φ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, la formule ci-dessus donne une application $\mathbb{C}$-linéaire f telle que $\Re g = \varphi$ (la $\mathbb{R}$-linéarité est immédiate et elle entraîne que, pour la $\mathbb{C}$-linéarité, il suffit de calculer $g(ix) = ig(x)$).

Le cas déjà démontré donne alors un prolongement $\mathbb{R}$-linéaire $\varphi : X \to \mathbb{R}$ de $\Re f$ tel que $\varphi \leq p$ et l'unique application $\mathbb{C}$-linéaire F avec $\Re F = \varphi$ est un prolongement de f.

Soient finalement p une semi-norme, $x \in X$ et $a = |F(x)|/F(x)$ si $F(x) \neq 0$ et $a = 1$ sinon. Alors

$$|F(x)| = F(ax) = \Re F(ax) \leq p(ax) = |a|p(x) = p(x).$$

$\square$

1.4. Espaces localement convexes.

(a) Une famille $\mathscr{P}$ de semi-normes sur l'espace vectoriel X est *filtrante* si

$$\forall\, p, q \in \mathscr{P}\; \exists\, r \in \mathscr{P} \text{ tel que } \max\{p, q\} \leq r.$$

(b) Pour deux familles de semi-normes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sur X nous écrivons $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$ si

$$\forall\, p \in \mathscr{P}\; \exists\, q \in \mathscr{Q},\, C \geq 0 \text{ tel que } p \leq Cq.$$

Le symbole $\mathscr{P} \sim \mathscr{Q}$ signifie $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$ et $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P}$.

(c) Un espace localement convexe (ELC) $(X, \mathscr{P})$ est un espace vectoriel muni d'une famille filtrante $\mathscr{P} \neq \emptyset$ de semi-normes.

(d) Pour un ELC $(X, \mathscr{P})$ le système

$$\mathfrak{T}_{\mathscr{P}} = \{A \subseteq X : \forall\, x \in A\; \exists\, p \in \mathscr{P},\, \varepsilon > 0 \quad B_p(x, \varepsilon) \subseteq A\}$$

est une topologie sur X (pour la stabilité par rapport aux intersections on utilise que $\mathscr{P}$ est filtrant). Les boules $B_p(x, \varepsilon)$, $p \in \mathscr{P}$, $\varepsilon > 0$ forment une base des voisinages de $x \in X$.

La topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{P}}$ donne alors les notions topologiques usuelles. En particulier, l'adhérence

$$\overline{A} = \{x \in X : \forall\, p \in \mathscr{P},\, \varepsilon > 0\; B_p(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset\} = \bigcap_{p \in \mathscr{P},\, \varepsilon > 0} A + B_p(0, \varepsilon)$$

est l'ensemble de tous les points de X qu'on peut approximer d'une précision quelconque par des éléments de A par rapport à chaque semi-norme $p \in \mathscr{P}$.

(e) Si L est un sous-espace d'un ELC $(X, \mathscr{P})$ nous considérons la famille $\mathscr{P}|_L = \{p|_L : p \in \mathscr{P}\}$ des restrictions sur L. Dans ce sens, L est encore une fois un ELC. Pour les produits cartésiens d'ELC, voir l'exercice 1.

(f) Voici un exemple très typique d'un ELC. Pour un espace topologique Ω nous munissons $X = \mathrm{C}(\Omega)$ de la famille

$$\mathscr{P} = \{\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : x \in K\} : K \subseteq \Omega \text{ compact}\}.$$

La topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{P}}$ décrit alors la convergence uniforme sur toutes les parties compactes.

1.5. Théorème.

Soient $(X, \mathscr{P})$ et $(Y, \mathscr{Q})$ deux ELC et $T : X \to Y$ linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) T est continu en 0.

(b) T est continu (en chaque $x \in X$).

(c) $\forall\, q \in \mathscr{Q}\; \exists\, p \in \mathscr{P},\, \varepsilon > 0 \quad T(B_p(0, \varepsilon)) \subseteq B_q(0, 1)$.

(d) $\forall\, q \in \mathscr{Q}\; \exists\, p \in \mathscr{P} \quad \sup\{q(T(x)) : p(x) \leq 1\} < \infty$.

(e) $\forall\, q \in \mathscr{Q}\; \exists\, p \in \mathscr{P},\, C > 0 \quad q \circ T \leq Cp$.

(f) $\{q \circ T : q \in \mathscr{Q}\} \prec \mathscr{P}$.

En particulier, pour deux familles filtrantes $\mathscr{P}$ *et* $\mathscr{Q}$ *nous avons* $\mathfrak{T}_{\mathscr{Q}} \subseteq \mathfrak{T}_{\mathscr{P}}$ *(i.e. la topologie* $\mathfrak{T}_{\mathscr{P}}$ *est plus forte) si et seulement si* $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P}$.

Démonstration. $(a) \Rightarrow (b)$: Soient $x \in X$ et U un voisinage de $T(x)$. Alors il existe $q \in \mathscr{Q}$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B_q(T(x), \varepsilon) \subseteq V$. Comme T est continu en 0 il existe $p \in \mathscr{P}$ et $\delta > 0$ tel que $T(B_p(0, \delta)) \subseteq B_q(0, \varepsilon)$. Pour tout $y \in B_p(x, \delta)$ nous avons $p(x - y) < \delta$ et donc $T(x) - T(y) = T(x - y) \in B_q(0, \varepsilon)$ Cela implique $T(y) \in B_q(T(x), \varepsilon)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ resulte immédiatement de la continuité en 0.

$(c) \Rightarrow (d)$: Si $p(x) \leq 1$ nous avons $p(\delta x) < \varepsilon$ pour tout $0 < \delta < \varepsilon$ et donc $q(T(x)) = \frac{1}{\delta} q(T(\delta x)) < \frac{1}{\delta}$. Passant à la borne inférieure montre que $\sup\{q(T(x)) : p(x) \leq 1\} \leq 1/\varepsilon$.

$(d) \Rightarrow (e)$: Soit C la borne supérieure dans (d). Si $p(x) = 0$ nous avons $p(nx) = 0 \leq 1$ et donc $nq(T(x)) = q(Tnx)) \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui implique $q(T(x)) = 0$. Si d'autre part $p(x) \neq 0$ nous avons $p(ax) = 1$ pour $a = 1/p(x)$ et donc $aq(T(x)) = q(T(ax)) \leq C$.

$(e) \Rightarrow (f)$ est une conséquence immédiate de la définition de $\prec$.

$(f) \Rightarrow (a)$: Pour $q \in \mathscr{Q}$ fixons $p \in \mathscr{P}$ et $C \geq 0$ tels que $q \circ T \leq Cp$. Pour $\varepsilon > 0$ nous obtenons $T(B_p(0, \varepsilon/C)) \subseteq B_q(0, \varepsilon)$ et donc la continuité en 0.

L'assertion sur $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P}$ résulte de l'équivalence $(b) \Leftrightarrow (f)$ pour l'identité $id : (X, \mathscr{P}) \to (X, \mathscr{Q})$. □

1.6. Le dual d'un ELC.

(a) Pour deux ELC $(X, \mathscr{P})$ et $(Y, \mathscr{Q})$ nous écrivons

$$L(X, Y) = L((X, \mathscr{P}), (Y, \mathscr{Q})) = \{T : X \to Y \text{ linéaire et continu}\}.$$

On voit facilement que $L(X, Y)$ est un espace vectoriel.

Si $Y = \mathbb{K}$ est muni de la valeur absolue $|\cdot|$, nous appelons

$$X^* = (X, \mathscr{P})^* = L(X, \mathbb{K}) \text{ le dual (topologique) de } X.$$

Le théorème précédent implique qu'une application linéaire $F : X \to \mathbb{K}$ appartient à X^* si et seulement s'il existe $p \in \mathscr{P}$ et $C > 0$ tel que $|F| \leq Cp$ si et seulement s'il existe un voisinage U de 0 tel que $F(U)$ est borné dans $\mathbb{K}$.

(b) Un théorème de Riesz dit que, pour un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ et $X = \mathscr{L}_2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ muni de la semi-norme $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ où $\langle f, g \rangle = \int f \overline{g} \, d\mu$, nous avons $X^* = \{\langle \cdot, g \rangle : g \in X\}$.

Le cas réel est démontré au cours « théorie de la mesure » (theorème 3.7). Il est facile d'en déduire le cas complexe. La démonstration montre que le résultat est en fait correct dans chaque espace « semi-Hilbert », i.e. un espace vectoriel muni d'un produit semi-scalaire tel que la semi-norme $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ est complète (cf. le deuxième chapitre).

(c) Un autre célèbre théorème de Riesz dit que, pour un espace métrique compact K, chaque élément F de $\mathrm{C}(K)^*$ est de la forme

$$F(f) = \int_K f(z)h(z)\,d\mu(z)$$

pour une mesure (finie et régulière) μ sur la σ-algèbre de Borel $\mathscr{B}(K)$ sur K et une fonction mesurable $h : K \to \mathbb{K}$ telle que $|h| = 1$. Ce théorème se trouve également dans le cours théorie de la mesure, chapitre 5.

(d) Définissons les espaces de suites

$$\begin{aligned} \ell_\infty &= \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}, \\ c_0 &= \{x \in \ell_\infty : x_n \to 0\}, \\ \ell_p &= \Big\{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = \big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\big)^{1/p} < \infty\Big\}. \end{aligned}$$

Alors l'application $J(F) = (F(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$ induit des bijections linéaires $c_0^* \to \ell_1$, $\ell_p^* \to \ell_q$ si $p, q > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ainsi que $\ell_1^* \to \ell_\infty$. Nous laissons la vérification comme exercice.

Le théorème suivant est une « version géométrique » du théorème de Hahn-Banach. Il signifie qu'on peut séparer deux parties convexes et disjointes par un hyperplan.

1.7. Théorème (de séparation).

Soient $(X, \mathscr{P})$ un ELC et $A, B \subseteq X$ convexes, disjoints en non-vides.

(a) Si A est ouvert il existe $F \in X^*$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que pour tous $a \in A$, $b \in B$

$$\Re F(a) < t \leq \Re F(b).$$

(b) Si A est compact et B est fermé il existe $F \in X^*$ et $s, t \in \mathbb{R}$ tels que pour tous $a \in A$, $b \in B$

$$\Re F(a) \leq s < t \leq \Re F(b).$$

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a) Fixons $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ et posons $x_0 = b_0 - a_0$ ainsi que $C = A - B + x_0$. Alors C est convexe avec $0 \in C$. En outre, $C = \bigcup_{b\in B} A - b + x_0$ est ouvert parce que les translatés de l'ouvert A sont ouverts. Il s'ensuit que C contient une boule de centre 0 par rapport à une semi-norme. Le théorème 1.2 (e) montre que la jauge de Minkowski $p = p_C$ de C satisfait l'inégalité triangulaire et $p(tx) = tp(x)$ pour tout $t > 0$.

Comme $A \cap B = \emptyset$ nous avons $x_0 \notin C$ et donc $p(x_0) \geq 1$. Soient

$$L = \rangle x_0 \langle = \{tx_0 : t \in \mathbb{R}\} \text{ et } f : L \to \mathbb{R},\ tx_0 \mapsto t.$$

Alors, f est linéaire et $f(tx_0) = t \leq p(tx_0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (le cas $t \leq 0$ étant triviale). Le théorème de Hahn-Banach procure un prolongement linéaire

$F : X \to \mathbb{R}$ de f tel que $F \leq p$. Comme C contient une boule de centre 0 et $C \subseteq \{p \leq 1\}$ cela implique que $|F| \leq 1$ sur un voisinage de 0 et alors, $F \in X^*$.

Comme $F(x_0) = f(x_0) = 1$ nous avons pour tous $a \in A$ et $b \in B$

$$F(a) - F(b) + 1 = F(a - b + x_0) \leq p(a - b + x_0) \leq 1.$$

Pour $t = \inf\{F(b) : b \in B\} \leq F(b_0)$ nous obtenons alors $F(a) \leq t \leq F(b)$ pour tous $a \in A$ et $B \in B$.

Supposons finalement qu'il existe $a \in A$ avec $F(a) = t$. Comme A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon x_0 \in A$ et nous obtenons la contradiction

$$t \geq F(a + \varepsilon x_0) = F(a) + \varepsilon F(x_0) = t + \varepsilon.$$

(b) Comme A est inclus dans l'ouvert B^c nous trouvons pour tout $a \in A$ un voisinage $B_{p_a}(a, \varepsilon_a) \subseteq B^c$ avec $p_a \in \mathscr{P}$ et $\varepsilon_a > 0$. Comme les boules $B_{p_a}(a, \varepsilon_a/2)$ sont ouvertes et forment un recouvrement de A la compacité procure une partie finie $E \subseteq A$ telle que $A \subseteq \bigcup_{a \in E} B_{p_a}(a, \varepsilon_a/2)$. Comme $\mathscr{P}$ est filtrant nous trouvons $q \in \mathscr{P}$ majorant tous les p_a et nous posons $\varepsilon = \min\{\varepsilon_a : a \in E\}$. Alors, l'ensemble $\tilde{A} = A + B_q(0, \varepsilon/2)$ est convexe et ouvert tel que $A \subseteq \tilde{A}$ et $\tilde{A} \cap B = \emptyset$.

La première partie nous donne $F \in X^*$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $F(a) < t \leq F(b)$ pour tous $a \in A$ et $b \in B$. Comme A est compact et F est continue, l'image $F(A)$ est compact dans $\mathbb{R}$ et donc la borne supérieur $s = \sup F(A)$ appartient à $F(A)$ ce qui montre $s < t$. □

Dans le corollaire suivant nous utilisons la définition $B^\circ = \{F \in X^* : |F(b)| \leq 1 \text{ pour tout } b \in B\}$. Cette partie de X^* est évidemment absolument convexe et on l'appelle le *polaire* (absolu) de B.

1.8. Corollaire.

(a) Soit B une partie convexe d'un ELC $(X, \mathscr{P})$. Alors, $x \in \overline{B}$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $F \in X^*$ qui satisfait $\Re F \leq t$ sur B on a $\Re F(x) \leq t$. Autrement dit, $\overline{B}$ est l'intersection de tous les demi-espaces $\{\Re F \leq t\}$, $F \in X^*$, qui contient B. Si $0 \in B$ il suffit de considérer $t = 1$.

(b) Si B est absolument convexe on a $x \in \overline{B}$ si et seulement si $|F(x)| \leq 1$ pour tout $F \in B^\circ$.

(c) Si L est un sous-espace de X on a $x \in \overline{L}$ si et seulement si $F(x) = 0$ pour tout $F \in X^*$ tel que $F|_L = 0$.

(d) Pour chaque semi-norme p sur l'espace vectoriel X et tout $x \in X$ nous avons

$$p(x) = \sup\{|F(x)| : p^*(F) \leq 1\} \text{ où } p^*(F) = \sup\{|F(y)| : p(y) \leq 1\}$$

est une vraie norme sur $(X, p)^*$.

(e) Pour $x \in X$ et $F \in X^* = (X,p)^*$ nous posons $\delta_x(F) = F(x)$. Alors
$$\delta : X \to X^{**} = (X^*, p^*)^*,\ x \mapsto \delta_x \text{ est linéaire tel que } p(x) = p^{**}(\delta_x).$$

On appelle le dual X^{**} du dual le *bidual* de (X,p). Si p est une vraie norme l'application δ est une *injection isométrique* de X dans X^{**}.

Le deuxième énoncé est une version du « théorème du bipolaire » : En dénotant $\Gamma(B)$ l'enveloppe absolument convexe d'une partie de X et $A^\bullet = \{x \in X : |F(x)| \leq 1 \text{ pour tout } F \in A\}$ pour une partie $A \subseteq X^*$ on on a $\overline{\Gamma(B)} = B^{\circ\bullet}$. Nous laissons la vérification comme un exercice.

Démonstration. (a) La continuité de $\Re F$ implique $\Re F \leq t$ sur $\overline{B}$ si $\Re F \leq t$ sur B, ce qui montre la nécessité de la condition. Pour démontrer sa suffisance remarquons que $\overline{B} = \bigcap\{B + B_p(0,\varepsilon) : p \in \mathscr{P}, \varepsilon > 0\}$ est encore une fois convexe et que $A = \{x\}$ est compact. Si $x \notin \overline{B}$ le théorème de séparation procure $G \in X^*$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $\Re G(x) < t \leq \Re G(b)$ pour tout $b \in B$. Alors, la partie réelle de $F = -G$ est majoré par $-t$ sur B et $\Re F(x) > -t$.

Si $0 \in B$ nous avons $t \leq \Re G(0) = 0$ et pour $s \in]\Re G(x), t[$ nous considérons $F = \frac{1}{s}G$.

(b) Comme B est cerclé $\Re F \leq 1$ sur B implique $|F| \leq 1$ sur B : Pour tout $b \in B$ tel que $F(b) \neq 0$ il suffit de considérer $a = |F(b)|/F(b)$ et de calculer $|F(b)| = \Re F(ab) \leq 1$. L'assertion résulte alors de (a).

(c) Vu (b) il suffit de remarquer que $L^\circ = \{F \in X^* : F|_L = 0\}$: Pour tout $y \in L$, $n \in \mathbb{N}$ et $F \in L^\circ$ nous avons $ny \in L$ et donc $|F(y)| = |F(ny)|/n \leq 1/n$ ce qui implique $F(y) = 0$.

(d) Démontrons d'abord que p^* est une norme sur $X^* = (X,p)^*$. La sous-additivité résulte de $|(F+G)(y)| = |F(y)+G(y)| \leq |F(y)|+|G(y)| \leq p^*(F)+p^*(G)$ si $p(y) \leq 1$. L'homogénéité $p^*(aF) = |a|p^*(F)$ est immédiate, et si $p^*(F) = 0$ nous avons $F(y) = 0$ pour tout $y \in B_p(0,1)$ ce qui implique $F = 0$ car $\rangle B_p(0,1)\langle = X$. En considérant $\frac{1}{p(x)}\, x$ si $p(x) \neq 0$ nous obtenons $|F(x)| \leq p^*(F)p(x)$ ce qui démontre $p(x) \geq \sup\{|F(x)| : p^*(F) \leq 1\}$. Dénotons cette borne supérieure par c et supposons $p(x) > r > c$, i.e. $x \notin \overline{B_p(0,r)}$. La deuxième partie procure $F \in B(0,r)^\circ$ avec $|F(x)| > 1$. Il s'ensuit $p^*(rF) \leq 1$ et donc la contradiction
$$r < r|F(x)| \leq \sup\{|G(x)| : p^*(G) \leq 1\} = c.$$

(e) Le point précédent montre $|\delta_x(F)| = |F(x)| \leq p^*(F)p(x)$, et $\delta_x : X^* \to \mathbb{K}$ étant évidemment linéaire nous avons en fait une application $\delta : X \to X^{**}$. Pour $x, y \in X$, $a, b \in \mathbb{K}$ et tout $F \in X^*$ la linéarité de F donne $\delta_{ax+by}(F) = F(ax+by) = aF(x) + bF(y) = (a\delta_x + b\delta_y)(F)$. Cela montre que δ est linéaire. La partie (d) donne finalement
$$p(x) = \sup\{|F(x)| : p^*(F) \leq 1\} = \sup\{|\delta_x(F)| : p^*(F) \leq 1\} = p^{**}(\delta_x). \quad \square$$

1.9. Deux applications.

(a) Soient K un espace métrique compact et $B \subseteq \mathrm{C}(K)$ convexe. Alors, une fonction $f \in \mathrm{C}(K)$ appartient à $\overline{B}$ par rapport à la norme uniforme $\|g\|_K = \sup\{|g(x)| : x \in K\}$ si et seulement s'il existe une suite $f_n \in B$ tel que $\sup \|f_n\|_K < \infty$ et $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in K$.

Démonstration. La nécessité de la condition est immédiate. Pour la suffisance, vu le corollaire 1.8(a), il suffit de démontrer que pour chaque $F \in C(K)^*$ avec $\Re(F) \leq t$ sur B nous avons $\Re F(f) \leq t$. Pour une telle fonctionnelle F le théorème de Riesz procure une mesure μ sur la σ-algèbre de Borel de K et une fonction mesurable h de valeur absolue 1 tels que $F(g) = \int_K gh\, d\mu$ pour tout $g \in \mathrm{C}(K)$.

Comme f_n sont majorés par une application constante (qui est intégrable car μ est une mesure finie), le théorème de Lebesgue implique

$$\Re F(f) = \Re \int_K fh\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Re \int_K f_n h\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \Re F(f_n) \leq t.$$

□

La proposition ci-dessus a l'aire d'être assez élémentaire (en particulier, si $K = [0,1]$). Pourtant, on ne connaît pas de démonstration facile et « élémentaire ». L'application suivante est même plus profonde et elle joue un rôle énormément important dans l'analyse complexe.

(b) **Théorème de Runge**. Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $K \subseteq \Omega$ compact tel que $\mathbb{C} \setminus K$ est connexe. Alors, pour toute fonction holomorphe $f \in H(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un polynôme p tel que $\|f - p\|_K \leq \varepsilon$.

Démonstration. Soit $L = \{p|_K : p \text{ polynôme}\} \subseteq C(K)$. Le théorème signifie $f|_K \in \overline{L}$ ce que nous allons démontrer en utilisant le corollaire 1.8(c), le théorème de Riesz comme dans (a) ainsi que la formule de Cauchy :

> Il existe un « cycle » Γ dans $\Omega \setminus K$ (c.à.d. un nombre fini de chemins $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$) tel que
>
> $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{z - \zeta}\, d\zeta$$
>
> pour chaque $f \in H(\Omega)$ et chaque $z \in K$ (l'intégrale curviligne sur Γ est définie comme la somme des intégrales sur $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$).

Vu 1.8(c) et le théorème de Riesz il suffit de démontrer que pour chaque mesure μ sur K et chaque fonction mesurable h de valeur absolue 1 telles que

$$\int_K ph\, d\mu = 0 \text{ pour tout polynôme } p, \text{ nous avons } \int_K fh\, d\mu.$$

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus K$ nous définissons $g(z) = \int_K \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta)$. En utilisant par exemple le théorème sur la dérivation des intégrales paramétriques on voit que $g \in H(\mathbb{C} \setminus K)$. En outre, pour $|z|$ assez grand nous avons $|\zeta/z| < 1/2$ et donc

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n / z^n$$

où cette série géométrique converge uniformément pour $\zeta \in K$. Cela implique

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-(n+1)} \int_K \zeta^n h(\zeta)\, d\mu(\zeta) = 0$$

pour $|z|$ assez grand. L'ouvert $\mathbb{C} \setminus K$ étant connexe nous obtenons alors $g(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus K$.

En utilisant la formule de Cauchy et le théorème de Fubini nous voyons

$$\int_K f(z)h(z)\, d\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} h(z)\, d\mu(z)\, d\zeta = \frac{-1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta) g(\zeta)\, d\zeta = 0$$

parce que $\zeta \in \Omega \setminus K$ où g s'annule. □

1.10. Les topologies faibles.

(a) Soient X un espace vectoriel, $X^\# = \{\varphi : X \to \mathbb{K} \text{ linéaire}\}$ et $M \subseteq X^\#$. Pour $E \subseteq M$ fini nous posons

$$q_E(x) = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E\}.$$

Alors $\sigma(X, M) = \{q_E : E \subseteq M \text{ fini}\}$ est une famille filtrante de semi-normes. La topologie engendrée par $\sigma(X, M)$ est appelée *la topologie faible* sur X induite par M. Elle décrit la « convergence ponctuelle » sur M.

(b) Pour un ELC $(X, \mathscr{P})$ nous avons $\sigma(X, M) \prec \mathscr{P} \Leftrightarrow M \subseteq (X, \mathscr{P})^*$.

En effet, $|\varphi| = q_{\{\varphi\}} \leq Cp$ pour un $p \in \mathscr{P}$ implique $\varphi \in X^*$. Soient d'autre part $M \subseteq X^*$ et $E \subseteq M$ fini. Vu la continuité on trouve $p_\varphi \in \mathscr{P}$ et $C_\varphi \geq 0$ avec $|\varphi| \leq C_\varphi p_\varphi$ et comme $\mathscr{P}$ est filtrant il existe $p \in \mathscr{P}$ majorant chaque p_φ. Cela montre $q_E \leq Cp$ pour $C = \max\{C_\varphi : \varphi \in E\}$.

(c) Pour $M, K \subseteq X^\#$ nous avons $\sigma(X, K) \prec \sigma(X, M) \Leftrightarrow K \subseteq \rangle M \langle$.

En effet, si $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \psi_k$ nous avons $|\varphi| \leq C q_{\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}}$ avec $C = \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k|$. Cela montre la suffisance de $K \subseteq \rangle M \langle$.

Soit d'autre part $\sigma(X, K) \prec \sigma(X, M)$ et $\varphi \in K$. Alors il existe $E = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq M$ et $C > 0$ tels que $|\varphi| \leq C \max\{|\psi_k| : k \in \{1, \ldots n\}\}$ et donc $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathscr{N}(\psi_k) \subseteq \mathscr{N}(\varphi)$ où $\mathscr{N}(\psi) = \{\psi = 0\}$ dénote le noyau d'une application linéaire. La conclusion découle alors du lemme algébrique suivant.

(d) **Lemme**. Soient $\varphi, \psi_k \in X^\#$ tels que $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \mathscr{N}(\psi_k) \subseteq \mathscr{N}(\varphi)$. Alors, il existe $c_k \in \mathbb{K}$ tels que $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \psi_k$.

Démonstration. Soit $\Psi : X \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$. En tant que l'image linéaire $L = \Psi(X)$ est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$. Nous vérifions que

$$f : L \to \mathbb{K},\ \Psi(x) \mapsto \varphi(x)$$

est une application *bien définie* : En effet, si $\Psi(x) = \Psi(y)$ nous avons $x - y \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathscr{N}(\psi_k)$ et donc $\varphi(x-y) = 0$ ce qui montre $\varphi(x) = \varphi(y)$.

La linéarité de Ψ et φ entraîne que f est linéaire et en étendant une base de $\Psi(X)$ à une base de $\mathbb{K}^n$ nous obtenons un prolongement linéaire $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ de f. Pour les vecteurs unitaires e_k et $c_k = F(e_k)$ nous obtenons pour tout $z = \sum_{k=1}^{n} z_k e_k$ l'égalité $F(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k z_k$. Pour tout $x \in X$ nous en déduisons

$$\varphi(x) = f(\Psi(x)) = F(\Psi(x)) = \sum_{k=1}^{n} c_k \psi_k(x).$$

□

(e) $(X, \sigma(X,M))^* = \rangle M \langle$ et, en particulier, $(X, \mathscr{P})^* = (X, \sigma(X, X^*))^*$ pour tout ELC X.

En effet, vu (b) nous avons $M \subseteq (X, \sigma(X,M))^*$ et comme ceci est un espace vectoriel nous obtenons $\rangle M \langle \subseteq (X, \sigma(X,M))^*$. Soit d'autre part $K = (X, \sigma(X,M))^*$. Le point (b) (pour $\mathscr{P} = \sigma(X,M)$) montre $\sigma(X,K) \prec \sigma(X,M)$ et donc $K \subseteq \rangle M \langle$ vu (c).

(f) Comme chaque ELC $(X, \mathscr{P})$ a le même dual que $(X, \sigma(X, X^*))$ le corollaire 1.8(a) implique

$$\overline{B}^{\mathscr{P}} = \overline{B}^{\sigma(X,X^*)} \text{ pour toute partie convexe } B \text{ de } X.$$

Attention, en générale les topologies induites par $\mathscr{P}$ et $\sigma(X, X^*)$ sont très différentes. Cela résulte du théorème suivant sur les espaces vectoriels de dimension finie (qui ne sont pas trop intéressants pour l'analyse fonctionnelle).

Un ELC $(X, \mathscr{P})$ est *séparé* si la topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{P}}$ est séparée (Hausdorff), i.e. on peut séparer chaque paire de points différents par des voisinages disjoints. On voit facilement que cela est équivalent au fait que pour tout $x \neq 0$ il existe $p \in \mathscr{P}$ tel que $p(x) \neq 0$.

1.11. Théorème.

(a) Soient $(X, \mathscr{P})$ un ELC séparé de dimension finie. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de X, alors $\mathscr{P} \sim \|\cdot\|_\infty$ avec $\left\| \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|_\infty = \max\{|c_k| : k \in \{1, \ldots, n\}\}$.

(b) Si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont deux (vraies) normes sur un espace vectoriel de dimension finie, alors $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

(c) Chaque sous-espace de dimension finie d'un ELC séparé est fermé.

(d) Pour un espace normé $(X, \|\cdot\|)$ nous avons $\|\cdot\| \sim \sigma(X, X^*)$ si et seulement si X est de dimension finie.

(e) Soit $(X, \mathscr{P})$ un ELC séparé qui admet un voisinage compact de l'origine. Alors X est de dimension finie.

Démonstration. (a) Pour chaque semi-norme p et $x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ nous avons $p(x) \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| p(e_k) \leq C\|x\|_\infty$ avec $C = \sum_{k=1}^{n} p(e_k)$. Soit d'autre part $\mathbb{K}^n$ muni de la norme $|z|_\infty = \max\{|z_1|, \ldots, |z_n|\}$ et $T : \mathbb{K}^n \to X$, $z \mapsto \sum_{k=1}^{n} z_k e_k$. Alors, T est linéaire, bijectif et continu. Le théorème de Heine-Borel montre que $K = \{z \in \mathbb{K}^n : |z|_\infty = 1\}$ est compact. La continuité implique que $T(K)$ est compact et donc fermé parce que $(X, \mathscr{P})$ est séparé. Comme $0 \notin T(K)$ il existe $p \in \mathscr{P}$ et $\varepsilon > 0$ avec $B_p(0, \varepsilon) \cap T(K) = \emptyset$, et nous en déduisons $B_p(0, \varepsilon) \subseteq T(B_{|\cdot|_\infty}(0, 1)) = B_{\|\cdot\|_\infty}(0, 1)$. En effet soit $x = T(z)$ avec $|z|_\infty \geq 1$ et $y = \frac{1}{|z|_\infty} z \in K$. Alors, $T(y) \notin B_p(0, \varepsilon)$ et donc $x = |z|_\infty T(y) \notin B_p(0, \varepsilon)$. Vu la définition nous avons $\|T(z)\|_\infty = |z|_\infty$ et le théorème 1.5 (c$\Rightarrow$e) implique $\|\cdot\|_\infty \leq Cp$.

(b) est une conséquence immédiate de (a).

(c) Soit M un sous-espace de dimension finie et $x \in \overline{M}$. Nous choisissons une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $L = \rangle M \cup \{x\} \langle$ tel que $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est une base de M (pour $m \in \{n-1, n\}$). Nous définissons l'application linéaire $F : L \to L$ par $\sum_{k=1}^{n} c_k e_k = \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k$. Alors, $M = \mathscr{N}(F)$ est fermé parce que F est continu sur $(L, \|\cdot\|_\infty)$ (on a même $\|F(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$). Cela montre $x \in M$.

(d) Si $\|\cdot\| \prec \sigma(X, X^*)$ il existe $E = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq X^*$ fini et $C \geq 0$ tel que $\|\cdot\| \leq C q_E$. Comme $\|\cdot\|$ est une vraie norme nous voyons $\bigcap_{k=1}^{n} \mathscr{N}(\psi_k) \subseteq \mathscr{N}(\|\cdot\|) = \{0\}$ et donc l'application $X \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto (\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$ est linéaire et injective.

D'autre part, il résulte du corollaire 1.8 que $\sigma(X, X^*)$ est séparé et si X est de dimension finie la première partie implique $\sigma(X, X^*) \sim \|\cdot\|_\infty \sim \|\cdot\|$.

(e) Soit U un voisinage compact de 0. Comme $\frac{1}{2}\mathring{U}$ est un ouvert contenant l'origine et vu que $U \subseteq \bigcup_{x \in U} x + \frac{1}{2}\mathring{U}$ il existe $E \subseteq U$ fini tel que $U \subseteq E + \frac{1}{2}U$. Pour $M = \rangle E \langle$ nous obtenons par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U \subseteq L + \tfrac{1}{2}(L + \tfrac{1}{2}U) \subseteq L + \tfrac{1}{4}U \subseteq \cdots \subseteq L + 2^{-n}U.$$

Comme U est compact et $U \subseteq \bigcup_{u \in U} B_p(u, 1)$ pour tout $p \in \mathscr{P}$ nous trouvons $C_p \geq 0$ tel que $U \subseteq B_p(0, C_p)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et n suffisamment grand cela donne $U \subseteq L + B_p(0, \varepsilon)$. Passant à l'intersection sur $\varepsilon > 0$ et $p \in \mathscr{P}$ nous obtenons donc $U \subseteq \overline{L} = L$ vu le point (c). D'où la conclusion parce que $X = \rangle U \langle$. $\square$

Pour un ELC $(X, \mathscr{P})$ nous considérons l'application $\delta : X \to X^{*\#}$, $x \mapsto \delta_x$ avec l'évaluation $\delta_x(F) = F(x)$. A la place de $\sigma(X^*, \delta(X))$ on écrit $\sigma(X^*, X)$ et on parle de la *topologie faible-$*$*. Avec $q_E(F) = \max\{|F(x)| : x \in E\}$ nous avons donc $\sigma(X^*, X) = \{q_E : E \subseteq X \text{ fini}\}$. Le point 1.10(e) montre

$$(X^*, \sigma(X^*, X))^* = \{\delta_x : x \in X\}.$$

1.12. Théorème (Alaoğlu).

Soit U un voisinage de 0 dans l'ELC $(X, \mathscr{P})$. Alors le polaire $U^\circ = \{F \in X^* : |F(x)| \leq 1$ pour tout $x \in U\}$ est $\sigma(X^*, X)$-compact.

Démonstration. Soit $Y = \mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K}\}$ considéré comme produit d'espaces topologiques $Y_x = (\mathbb{K}, |\cdot|)$, i.e. muni de la topologie minimale sur Y telle que les évaluations δ_x sont continues. Cette topologie est en fait donnée par $\mathscr{Q} = \{q_E : E \subseteq X \text{ fini}\}$ avec q_E comme ci-dessus et donc, $\sigma(X^*, X) = \mathscr{Q}|_{X^*}$.

Le dual algébrique $X^\#$ est fermé dans $(Y, \mathscr{Q})$ parce que

$$X^\# = \bigcap_{x,y \in X, a,b \in \mathbb{K}} \mathscr{N}(\delta_{ax+by} - a\delta_x - b\delta_y)$$

et les noyaux des applications continues sont fermés. Soit $p_U = \inf\{t > 0 : x \in tU\}$ la jauge de Minkowski (qui n'est pas nécessairement sous-additive si U n'est pas convexe). En tant que voisinage de l'origine, U contient une boule de centre 0 et donc, $p_U(x) < \infty$ pour tout $x \in X$. Vu le théorème de Tychonov et la compacité des disques fermés dans $\mathbb{K}$, la partie

$$\begin{aligned} K &= \prod_{x \in X} \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq p_U(x)\} \\ &= \{f : X \to \mathbb{K} : |f(x)| \leq p_U(x) \text{ pour tout } x \in X\} \end{aligned}$$

est compact dans $(Y, \mathscr{Q})$. Comme l'intersection d'un compact et d'un fermé est toujours compacte, il suffit alors de démontrer $K \cap X^\# = U^\circ$: Si $F \in K \cap X^\#$ et $x \in U$ nous avons $|F(x)| \leq p_U(x) \leq 1$ et ainsi, F est borné sur un voisinage de 0 ce qui implique $F \in X^*$ et alors $F \in U^\circ$. Si, d'autre part, $F \in U^\circ$ nous avons $F \in X^\#$ et $|F(x)| \leq p_U(x)$ pour tout $x \in X$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $0 < t < p_U(x) + \varepsilon$ tel que $x \in tU$ et donc $|F(x)| = t|F(\frac{1}{t}x)| \leq t$. Passant à la borne inférieure montre $|F(x)| \leq p_U(x)$ et donc $F \in K$. $\square$

Pour un espace normé (X, p) et la boule unitaire fermée $B_X = \overline{B}_p(0, 1)$, le polaire est

$$B_X^\circ = \{F \in X^* : \sup\{|F(x)| : p(x) \leq 1\} = B_{X^*},$$

i.e. la boule unitaire fermée du dual (X^*, p^*). Le théorème de Alaoğlu implique que cette boule est $\sigma(X^*, X)$-compacte tandis que le théorème 1.11 implique qu'elle est compacte dans l'espace normé (X^*, p^*) si et seulement si X^* et donc aussi X sont de dimension finie.

Sur le dual X^* on a encore la topologie faible $\sigma(X^*, X^{**})$ qui est plus forte que la topologie faible-$*$. En général, les deux topologies sont différentes et il faut donc faire attention de ne pas les confondre (une faute qui arrive même aux mathématiciens professionnels). Les espaces normés pour lesquels les deux topologies coïncident sont appelés *réflexifs*. Une caractérisation de tels espaces se trouve dans les exercices.

1.13. Points extrêmes.

(a) Soient K une partie d'un espace vectoriel X et $M \subseteq K$ non-vide. On appelle M une *partie K-extrême* de K si chaque segment d'extrémités dans K dont l'intérieur rencontre M a ses extrémités dans M, i.e.

$$\forall\, x, y \in K,\, t \in]0,1[\quad \big(tx + (1-t)y \in M \Rightarrow x, y \in M\big).$$

Un point $x \in K$ est appelé K-extrême si le singleton $\{x\}$ est une partie K-extrême, i.e. x n'est pas une combinaison convexe propre de deux points distincts de K. Si K est donné par le contexte on dit simplement extrême. L'ensemble de points extrêmes est noté $\mathrm{Ext}(K)$.

(b) Voici quelques exemples :
- K est K-extrême si $K \neq \emptyset$.
- Les côtés $[0,1] \times \{0\}$, $[0,1] \times \{1\}$, $\{0\} \times [0,1]$, $\{1\} \times [0,1]$ du carré $[0,1] \times [0,1]$ ainsi que leurs unions sont des parties extrêmes. Les coins (a,b), $a, b \in \{0,1\}$ sont les points extrêmes.
- Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ la boule unitaire euclidienne. Alors chaque partie non-vide de la frontière est K-extrême.
- Si K est une partie d'un ELC, alors aucun point de l'intérieur $\mathring{K}$ n'est extrême. En effet, si $B_p(x, \varepsilon) \subseteq K$, alors $(1+a)x \in K$ pour tout $|a| < \varepsilon/p(x)$ et donc, pour δ suffisamment petit, $x = \frac{1}{2}(1+\delta)x + \frac{1}{2}(1-\delta)x$ est une combinaison convexe propre de deux éléments de K.

(c) Pour une partie K d'un espace vectoriel on appelle

$$\mathscr{C}(K) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k : n \in \mathbb{N},\, x_k \in K,\, \lambda_k \geq 0,\, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \right\}$$

l'enveloppe convexe de K. Elle est la plus petite partie convexe contenant l'ensemble K.

1.14. Théorème (Krein-Milman).

Pour chaque partie compacte K d'un ELC séparé on a $K \subseteq \overline{\mathscr{C}(\mathrm{Ext}(K))}$.

Démonstration. Nous démontrons le théorème en plusieurs étapes.

(1) *Soient M une partie K-extrême, $F \in X^*$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $\Re F(x) \leq c$ pour tout $x \in M$. Alors*

$$M_{F,c} = \{x \in M : \Re F(x) = c\} \text{ est vide ou } K\text{-extrême.}$$

En effet, soient $x, y \in K$, $t \in]0,1[$ tel que $tx+(1-t)y \in M_{F,c}$. Comme M est extrême nous avons $x, y \in M$ et donc $\Re F(x), \Re F(y) \leq c$. En supposant $\Re F(x) < c$ ou $\Re F(y) < c$ nous obtenons la contradiction $\Re F(tx+(1-t)y) = t\Re F(x) + (1-t)\Re F(y) < c$.

(2) *Chaque partie extrême $M = \overline{M}$ de K contient un point extrême.*

Considérons $\mathfrak{M} = \{N = \overline{N}\ K\text{-extrême}, N \subseteq M\}$ muni de l'inclusion comme ordre partiel. Afin d'utiliser le lemme de Zorn pour trouver des éléments minimaux, nous vérifions que chaque système $\{N_i : i \in I\}$ totalement ordonné de $\mathfrak{M}$ admet un minorant. En supposant $N = \bigcap_{i\in I} N_i = \emptyset$ nous trouvons le recouvrement ouvert $K \subseteq \bigcup_{i\in I} N_i^c$ et donc $K \subseteq \bigcup_{i\in E} N_i^c$ pour une partie finie $E \subseteq I$. Le système étant totalement ordonné il existe $k \in E$ tel que $\bigcap_{i\in E} N_i = N_k$ ce qui implique $K \subseteq N_k^c$ et donc la contradiction $N_k = \emptyset$ (notez que, par définition, une partie extrême n'est pas vide). On vérifie facilement que N est extrême et donc nous avons construit un minorant du système.

Le lemme de Zorn procure un élément minimale $N \in \mathfrak{M}$. Afin de montrer que N est un singleton nous supposons qu'il existe deux points distincts $a, b \in N$. Comme $(X, \mathscr{P})$ est séparé $B = \{b\}$ est fermé et $A = \{a\}$ est compact. Le théorème de séparation procure alors $F \in X^*$ tel que $\Re F(a) < \Re F(b)$. En tant qu'une partie fermée d'un compact, N est encore une fois compact et vu la continuité de $\Re F$ la borne supérieure $c = \sup\{\Re F(x) : x \in N\}$ est atteinte. La première étape implique que $N_{F,c} \neq \emptyset$ est une partie extrême qui est proprement incluse dans N. Cela contredit la minimalité de N, et nous avons donc démontré que chaque élément minimale dans $\mathfrak{M}$ est un singleton dont le seul élément est alors un point extrême de K.

(3) Soit maintenant $a \in K$ et supposons $a \notin \overline{\mathscr{C}(\mathrm{Ext}(K))}$. Vu (2) (pour $M = K$) cet ensemble n'est pas vide et le théorème de séparation donne $F \in X^*$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\Re F(a) > t \geq \Re F(x) \text{ pour tout } x \in \overline{\mathscr{C}(\mathrm{Ext}(K))}.$$

Comme ci-dessus, la borne supérieure $c = \sup\{\Re F(x) : x \in K\}$ est atteinte et donc $M = K_{F,c}$ est extrême. La deuxième étape implique que $K_{F,c}$ contient un point extrême x et comme $a \in K$ nous obtenons la contradiction

$$\Re F(x) = c \geq \Re F(a) > t \geq \Re F(x) = c.$$

$\square$

Exemple. La boule unitaire $B_{c_0} = \{x \in c_0 : \|x\|_\infty \leq 1\}$ ne contient aucun point extrême. En effet, x convergeant vers 0 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| < \frac{1}{2}$ et donc $x = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}e_n) + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}e_n)$ est une combinaison convexe propre de deux éléments de B_{c_0}. Le théorème de Krein-Milman implique qu'il n'existe aucune structure localement convexe séparée pour laquelle B_{c_0} est compacte. En particulier, il résulte du théorème de Alaoğlu que $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas le dual (X^*, p^*) d'un espace normé.

Le résultat suivant est une combinaison des « grands théorèmes » de ce chapitre.

1.15. Corollaire.

Un sous-espace L de l'espace normé (X, p) est dense si et seulement si $\mathrm{Ext}(L^\perp \cap B_{X^*}) = \{0\}$ *où B_{X^*} dénote la boule unitaire de (X^*, p^*) et* $L^\perp = \{F \in X^* : f|_L = 0\}$.

Démonstration. Si L est dense on a $L^\perp = \{0\}$ et ainsi, la condition est nécessaire. Démontrons la suffisance. Vu le corollaire du théorème de Hahn-Banach 1.8(c) il faut démontrer $L^\perp = \{0\}$ et comme X^* est l'union des multiples de B_{X^*} cela est équivalent à $L^\perp \cap B_{X^*} = \{0\}$. Le théorème de Alaoğlu implique que $B_{X^*} = B_X^\circ$ est $\sigma(X^*, X)$-compact et comme $L^\perp = \bigcap\{\mathscr{N}(\delta_x) : x \in L\}$ est $\sigma(X^*, X)$-fermé l'intersection $L^\perp \cap B_{X^*}$ est encore une fois $\sigma(X^*, X)$-compacte. Vu le théorème de Krein-Milman cette intersection est $\{0\}$ si chaque point extrême est 0. $\square$

Pour formuler une application de ce corollaire nous appelons un sous-espace A de $\mathrm{C}(\Omega)$ une *sous-algèbre* si $fg \in A$ pour tous $f, g \in A$. On dit que A est *auto-adjoint* si la fonction conjuguée $\overline{f} \in A$ pour tout $f \in A$ (ceci est une condition vide pour le champ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). *A sépare les points* si pour tout $x \neq y$ il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$. Finalement, on dit que *A n'a pas de zéro commun* si, pour tout $x \in \Omega$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) = 1$.

Le célèbre résultat suivant généralise le théorème classique de Weierstraß sur l'approximation polynomiale.

1.16. Théorème (Stone-Weierstraß).

Soient Ω un espace métrique compact et A une sous-algèbre auto-adjointe de $\mathrm{C}(\Omega)$ *qui sépare les points et qui n'a pas de zéro commun. Alors, A est dense dans* $\mathrm{C}(\Omega)$ *par rapport à la norme uniforme* $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$.

Démonstration (de Branges). Supposons qu'il existe un point extrême $F \neq 0$ de $A^\perp \cap B_{\mathrm{C}(\Omega)^*}$. Le troisième exemple dans 1.13 (b) (pour $X = A^\perp$) montre $\|F\|^* = 1$. Le théorème de Riesz procure une mesure μ sur Ω et une fonction mesurable $|h| = 1$ telles que $F(f) = \int_\Omega fh\,d\mu$ pour tout $f \in \mathrm{C}(\Omega)$. En outre, la mesure est *régulière*, i.e. $\mu(M) = \sup\{\mu(K) : K = \overline{K} \subseteq M\}$, et en approximant le signe de h par des fonctions continues de valeur absolue

≤ 1 on obtient $\mu(\Omega) = \sup\{F(f) : \|f\| \leq 1\} = \|F\|^* = 1$ (cf. la proposition 5.5 du cours théorie de la mesure).

Soit $S = \bigcap\{B = \overline{B} : \mu(B^c) = 0\}$ le *support* de μ. Pour tout $K = \overline{K} \subseteq S^c$ nous avons $K \subseteq \bigcup\{B^c : B = \overline{B}, \mu(B^c) = 0\}$ et, étant compacte en tant que partie fermée d'un compact, K est déjà inclus dans une union finie. Cela montre $\mu(K) = 0$ et la régularité implique alors $\mu(S^c) = 0$.

Supposons maintenant qu'il existe $x \neq y$ dans S. Comme A sépare les points il existe $g \in A$ tel que $g(x) \neq g(y)$, et comme A est auto-adjoint on peut supposer que g est réel (en effet, $\Re g = \frac{1}{2}(g+\overline{g}) \in A$ et $\Im g = \frac{1}{2i}(g-\overline{g}) \in A$). En multipliant par un scalaire positif on peut supposer en plus que $\|g\| < 1$. Nous définissons $G_\pm(f) = F((\frac{1}{2}f(1\pm g))$ pour $f \in \mathrm{C}(\Omega)$. Pour $f \in A$ nous avons $f(1 \pm g) = f \pm fg \in A$ et donc $G_\pm \in A^\perp$. En outre, nous avons $1 \pm g > 0$ sur Ω et comme ci-dessus cela donne $\|G_\pm\|^* = \int \frac{1}{2}(1 \pm g)\, d\mu > 0$ ainsi que $\|G_+\|^* + \|G_-\|^* = \int \frac{1}{2}(1+g)\, d\mu + \int \frac{1}{2}(1-g)\, d\mu = \int 1\, d\mu = 1$. Nous obtenons que

$$F = \|G_+\|^* \left(\frac{1}{\|G_+\|^*} G_+\right) + \|G_-\|^* \left(\frac{1}{\|G_-\|^*} G_-\right)$$

est une combinaison convexe de deux éléments de $A^\perp \cap B_{\mathrm{C}(\Omega)^*}$ et l'extrémalité implique $\frac{1}{\|G_+\|^*} G_+ = F$ et donc $\frac{1}{2}(1+g) = \|G\|_+$ sur Ω. Cela contredit le fait $g(x) \neq g(y)$.

Nous avons démontré $S = \{x\}$ pour un point $x \in \Omega$, et comme A n'a pas de zéro commun il existe $f \in A$ tel que $f(x) = 1$. Cela mène à la contradiction

$$0 = F(f) = \int_{\{x\}} fh\, d\mu = f(x)h(x) \text{ qui est de valeur absolue 1.}$$

$\square$

CHAPITRE 2

Complétude

Rappelons qu'un espace semi-métrique (X, d) est *complet* si chaque suite de Cauchy a une limite (qui est unique si d est une vraie métrique). Le *diamètre* de $B \subseteq X$ est $\operatorname{diam}(B) = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$ (où $\sup \emptyset = -\infty$). Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si $\operatorname{diam}\{x_m : m \geq n\} \to 0$.

2.1. Lemme.

(a) Soit $\varepsilon_n > 0$ tels que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$. L'espace semi-métrique (X, d) est complet si et seulement si chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varepsilon_n$ converge dans (X, d).

(b) Si (X, d) est complet, alors pour chaque suite $B_{n+1} \subseteq B_n$ de parties fermées et non-vides de X telles que $\operatorname{diam}(B_n) \to 0$ on a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.

Démonstration. (a) Pour une suite de Cauchy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on trouve par récurrence $k(n) > k(n-1)$ tel que $x_n = y_{k(n)}$ satisfait $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varepsilon_n$ et donc x_n converge vers un point $x \in X$. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ avec $d(x_n, x) \leq \varepsilon/2$ et $d(y_n, y_m) \leq \varepsilon/2$ pour tout $n, m \geq N_\varepsilon$. Pour $m = k(n) \geq n \geq N_\varepsilon$ l'inégalité triangulaire implique $d(y_n, x) \leq d(y_n, y_m) + d(x_n, x) \leq \varepsilon$.

Si d'autre part $d(x_n, x_{n+1}) \leq \varepsilon_n$ et $n \leq m$ l'inégalité triangulaire montre

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \varepsilon_k \to 0$$

et donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

(b) Pour $x_n \in B_n$ et $n \leq m$ on a $d(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(B_n)$ ce qui implique que x_n est une suite de Cauchy. Chaque limite appartient alors à $\overline{B_n} = B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.2. Théorème (Baire).

Soit (X, d) un espace semi-métrique complet et $A_n \subseteq X$ ouvert et dense. Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est également dense.

Démonstration. Pour $x_0 \in X$ et $\varepsilon_0 > 0$ il faut démontrer $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ (où $\overline{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon\}$). Soit $B_0 = \overline{B}(x_0, \varepsilon_0)$ et supposons que nous avons déjà construit $x_1, \ldots, x_n$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \leq \frac{1}{n}$ tels que

$$(*) \quad B_n = \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subseteq B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n.$$

Ce dernier ensemble est ouvert et non-vide et donc son intersection avec A_{n+1} n'est pas vide (sinon, x_n n'appartiendrait pas à $\overline{A_{n+1}}$). Pour un élément quelconque x_{n+1} de cette intersection (qui est ouverte) il existe $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$ tel que l'intersection contient même la boule $\overline{B}(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})$. Nous avons donc démontré $(*)$ pour $n + 1$. Vu 2.1(b), l'intersection des B_n n'est pas vide et chaque élément appartient à $B_0 \cap A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Remarque. On appelle une partie B de X *de première catégorie* s'il existe $B_n = \overline{B_n}$ tels que $\overset{\circ}{B}_n = \emptyset$ et $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Sinon, B est de *deuxième catégorie.* Le théorème de Baire pour les complémentaires implique que, dans un espace semi-métrique complet, chaque partie ouverte non-vide est de deuxième catégorie.

Pour appliquer le théorème de Baire et d'autres résultats principaux aux espaces localement convexes nous avons besoin d'une caractérisation si la topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{P}}$ d'un ELC $(X, \mathscr{P})$ est induite par une (semi-) métrique. On appelle un tel ELC *(semi-) métrisable.*

2.3. Théorème.

Un ELC $(X, \mathscr{P})$ est semi-métrisable si et seulement s'il existe une famille filtrante et dénombrable $\mathscr{Q}$ telle que $\mathscr{P} \sim \mathscr{Q}$. Dans ce cas, si $\mathscr{Q} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite croissante de semi-normes p_n,

$$d(x, y) = \sup\{p_n(x - y) \wedge 1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

est une semi-métrique qui induit la topologie $\mathfrak{T}_{\mathscr{P}}$ telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est Cauchy si et seulement si $p(x_n - x_m) \to 0$ pour tout $p \in \mathscr{P}$.

Démonstration. Si la topologie de $(X, \mathscr{P})$ est induite par une métrique d les boules $U_n = B_d(0, \frac{1}{n})$ forment une base des voisinages de 0 et il existe donc $p_n \in \mathscr{P}$ et $\varepsilon_n > 0$ tels que $B_{p_n}(0, \varepsilon_n) \subseteq U_n$. Comme $\mathscr{P}$ est filtrant on peut supposer $p_n \leq p_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ainsi $\mathscr{Q} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ est filtrant. Nous avons $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{P}$ et donc $\mathscr{Q} \prec \mathscr{P}$. Pour démontrer $\mathscr{P} \prec \mathscr{Q}$ fixons $p \in \mathscr{P}$. Comme $B_p(0, 1)$ est un voisinage de 0 cette boule contient U_n pour un nombre $n \in \mathbb{N}$ et donc $B_{p_n}(0, \varepsilon_n) \subseteq U_n \subseteq B_p(0, 1)$. Vu le théorème 1.5 cela implique $p \leq Cp_n$ pour une constante $C \geq 0$.

Soit d'autre part $\mathscr{P} \sim \mathscr{Q} = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$. On vérifie facilement que d comme dans le théorème est une semi-métrique. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n > 1/\varepsilon$ nous avons $B_{p_n}(x, \varepsilon) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$. En outre, pour tout $p \in \mathscr{P}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tel que $p \leq Cp_n$, et pour $\varepsilon > 0$ et $\delta \leq \min\{\frac{1}{n+1}, \varepsilon/C\}$ nous obtenons pour tout $x \in X$

$$B_d(x,\delta) \subseteq B_{p_n}(x,\delta) \subseteq B_p(x,\varepsilon).$$

Cela montre l'égalité des topologies induites par $\mathscr{P}$ et d et également l'assertion sur les suites de Cauchy parce que n et δ ne dépendent que de p (mais pas de $x \in X$). $\square$

2.4. Espaces de Banach et de Fréchet.

(a) Un *espace de Banach* est un espace normé complet. Les espaces de suites ℓ_∞, c_0 et ℓ_p pour $1 \le p < \infty$ introduits dans 1.6(d) ainsi que $(\mathrm{C}(K), \|\cdot\|_K)$ pour un espace topologique compact K sont des espaces de Banach. En outre, chaque sous-espace fermé d'un espace de Banach est de Banach.

Pour chaque espace semi-normé $(X, \|\cdot\|)$ le dual $(X^*, \|\cdot\|^*)$ est un espace de Banach.

En effet, si F_n est une suite de Cauchy dans X^* les limites $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)$ existent en tout $x \in X$ et on obtient facilement que F est linéaire. Vu la définition $\|F\|^* = \sup\{|F(x)| : x \in B_X\}$, F est borné sur B_X et donc continu et on obtient $\|F_n - F\|^* \to 0$.

(b) Une suite d'un ELC $(X, \mathscr{P})$ est une *suite de Cauchy* si elle est de Cauchy dans (X,p) pour chaque $p \in \mathscr{P}$. L'ELC est *séquentiellement complet* si chaque suite de Cauchy converge.

(c) Un *espace de Fréchet* est un ELC métrisable séquentiellement complet. Vu le théorème précédent, la métrique $d(x,y) = \sup\{p_n(x-y) \wedge 1/n : n \in \mathbb{N}\}$ est alors complète. Chaque sous-espace fermé d'un espace de Fréchet est du même type.

(d) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert et $\mathrm{C}(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω. Muni de la convergence uniforme sur tout compact donnée par

$$\mathscr{P} = \{\|f\|_K = \sup\{|f(x)| : x \in K\} : K \subseteq \Omega \text{ compact}\},$$

$\mathrm{C}(\Omega)$ est un espace de Fréchet. Pour la démonstration on utilise le fait que $K_n = \{x \in \Omega \cap \overline{B}(0,n) : \mathrm{dist}(x, \Omega^c) \le n\}$ sont des parties compactes telles que chaque compact est inclus dans K_n pour n suffisamment grand, et que la limite uniforme de fonctions continues sur un compact est encore une fois continue.

(e) Pour $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert l'espace $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ est un espace de Fréchet pour la suite des semi-normes

$$\|f\|_n = \max\{\|\partial^\alpha f\|_{K_n} : |\alpha| \le n\}.$$

La démonstration utilise l'exemple précédent : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, la suite $(\partial^\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathrm{C}(\Omega)$ et on vérifie que les limites $g_\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \partial^\alpha f_n$ sont partiellement dérivables telles que $\partial^\alpha g_0 = g_\alpha$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $f = g_0$ dans $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$.

(f) Pour une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ on appelle $\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$ le *support* de f. Pour une partie compacte $K \subseteq \mathbb{R}^d$ l'espace

$$\mathscr{D}(K) = \{f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \mathrm{supp}(f) \subseteq K\}$$

est fermé dans $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et donc un espace de Fréchet.

2.5. Théorème (Banach-Steinhaus).

Soient $(X, \mathscr{P})$ *et* $(Y, \mathscr{Q})$ *deux ELC et* $T_i \in L(X, Y)$ *pour tout* $i \in I$ *tels que, pour tout* $q \in \mathscr{Q}$,

$M_q = \{x \in X : \sup\{q(T_i(x)) : i \in I\} < \infty\}$ *est de deuxième catégorie. Alors*

$$\forall\, q \in \mathscr{Q}\ \exists\, p \in \mathscr{P} \text{ tel que } \sup\{q(T_i(x)) : i \in I, p(x) \leq 1\} < \infty.$$

Pratiquement le seul moyen pour vérifier l'hypothèse sur la deuxième catégorie est le cas d'un espace de Fréchet $(X, \mathscr{P})$. Dans cette situation le théorème de Baire implique que chaque ouvert non-vide, et en particulier X lui-même, est de deuxième catégorie. Notez que, par exemple, l'espace des suites finies $\{x \in \mathbb{K}^n : x_n = 0$ pour n suffisamment grand$\}$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$ pour un réel $p \in [1, \infty]$ est de première catégorie (parce que chaque sous-espace de dimension finie est fermé d'intérieur vide).

Démonstration. Soit $M_{q,n} = \{x \in X : \sup\{q(T_i(x)) : i \in I\} \leq n\}$. Comme $\overline{B}_q(0, n)$ est fermé dans $(Y, \mathscr{Q})$ les $M_{q,n} = \bigcap_{i \in I} T_i^{-1}(\overline{B}_q(0, n))$ sont fermés tels que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_{q,n} = M_q$ est de deuxième catégorie. Il s'ensuit qu'un des intérieurs des $M_{q,n}$ n'est pas vide et on trouve alors $y \in X$, $p \in \mathscr{P}$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{B}_p(y, \varepsilon) \subseteq M_{q,n}$ et donc

$$\sup\{q(T_i(y - x)) : i \in I, p(x) \leq \varepsilon\} \leq n.$$

Comme $q(T_i(x)) \leq q(T_i(y)) + q(T_i(x - y)) \leq 2n$ pour tout $p(x) \leq \varepsilon$ et $i \in I$ nous obtenons

$$\sup\{q(T_i(x)) : i \in I, p(x) \leq 1\} \leq 2n/\varepsilon < \infty. \qquad \square$$

2.6. Une application pour les séries de Fourier.

(a) Pour une fonction $f \in \mathrm{C}([0, 2\pi])$ on appelle $\hat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$ les *coefficients de Fourier* et on écrit

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}.$$

Cette *série de Fourier* converge dans $\mathscr{L}_2([0, 2\pi])$ vers f, mais la convergence ponctuelle est une question plus délicate.

(b) Le N-ième *noyau de Dirichlet* est la fonction $D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}$. On a $D_N(2k\pi) = 2N+1$ pour $k \in \mathbb{Z}$, et pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ nous multiplions avec $e^{ix} - 1$ et puis par $2ie^{-ix/2}$ et nous obtenons

$$D_N(x) = \frac{e^{i(N+1)x} - e^{-iNx}}{e^{ix} - 1} = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Soit $P_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}$ la N-ième somme partielle de la série de Fourier. La définition des coefficients de Fourier implique alors

$$P_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny}\, dy\, e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) D_N(x-y)\, dy.$$

(c) **Théorème.** Pour tout $S \subseteq [0, 2\pi]$ dénombrable il existe $f \in \mathrm{C}([0, 2\pi])$ tel que sa série de Fourier diverge en tout $x \in S$.

Démonstration. Nous considérons l'espace de Banach $\mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}) : f(x+2\pi) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\}$ muni de la norme $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 2\pi]\} = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$. Fixons d'abord $s \in S$ et posons

$$M_s = \{f \in \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) : P_N f(s) \text{ borné dans } \mathbb{C}\}.$$

En supposant que M_s soit de deuxième catégorie le théorème de Banach-Steinhaus (pour les opérateurs $T_N : \mathrm{C}_{2\pi}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto P_N f(s)$) implique

$$C = \sup\{|P_N f(s)| : N \in \mathbb{N}, \|f\| \le 1\} < \infty.$$

Vu le point précédent nous avons $P_N f(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) D_N(s-y)\, dy$. En approximant (pour s fixé) le signe de $y \mapsto D_N(s-y)$ dans $\mathscr{L}_2([0, 2\pi])$ par des fonctions continues f avec $f(0) = f(2\pi)$ et $\|f\| \le 1$ nous obtenons alors

$$\int_0^{2\pi} |D_N(y)|\, dy = \int_0^{2\pi} |D_N(s-y)|\, dy \le 2\pi C.$$

D'autre part, le théorème des accroissements finis donne $|\sin(t)| \le t$ pour $t \ge 0$ et en utilisant $D_N(y) = \sin((N+\frac{1}{2})y)/\sin(\frac{y}{2})$ nous voyons

$$\begin{aligned} 2\pi C \ge \int_0^{2\pi} |D_N(y)|\, dy &\ge \int_0^{2\pi} \frac{|\sin((N+\frac{1}{2})y)|}{y/2}\, dy \\ &= 2 \int_0^{(2N+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{|t|}\, dt = 2 \sum_{k=0}^{2N} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{|t|}\, dt \\ &\ge 2 \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\, dt = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{2N} \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

ce qui contredit la divergence de la serie harmonique.

Nous avons démontré que M_s est de première catégorie et donc l'union dénombrable $M = \bigcup_{s\in S} M_s$ est de première catégorie. Vu le théorème de Baire le complémentaire de cet ensemble n'est pas vide et pour chaque $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}) \setminus M$ les sommes partielles de la série de Fourier ne sont même pas bornées. $\square$

Continuons avec un autre théorème principal sur les espaces métriques complets.

2.7. Théorème (Schauder).

Soient (X,d) un espace semi-métrique complet, (Y,D) un espace métrique et $f : X \to Y$ continu tel que

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall x \in X \text{ on a } B_Y(f(x),\delta) \subseteq \overline{f\big(B_X(x,\varepsilon)\big)}.$$

Alors, $f(A)$ est ouvert pour tout ouvert $A \subseteq X$ et $(f(X),D)$ est complet.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ nous choisissons $\delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$ comme dans le théorème. Nous démontrerons

$$(*) \quad B_Y(f(x),\delta(\varepsilon)) \subseteq f(\overline{B}_X(x,2\varepsilon)) \text{ pour tout } \varepsilon > 0.$$

Soient donc $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $D(f(x),y) < \delta(\varepsilon)$. Posons $x_0 = x$, $\varepsilon_n = 2^{-n}\varepsilon$ et $\delta_n = \delta(\varepsilon_n)$. Supposons que nous avons déjà construit $x_0,\dots,x_n \in X$ tels que $d(x_n,x_{n-1}) < \varepsilon_{n-1}$ et $D(y,f(x_n)) < \delta_n$ (pour $n = 0$ la première condition est vide). Comme $y \in B_Y(f(x_n),\delta(\varepsilon_n)) \subseteq \overline{f(B_X(x_n,\varepsilon_n))}$ il existe $x_{n+1} \in B_X(x_n,\varepsilon_n)$ tel que $D(y,f(x_{n+1})) < \delta_{n+1}$.

Pour tous $0 \leq n \leq m$ nous obtenons de l'inégalité triangulaire

$$d(x_n,x_m) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_k,x_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{m-1} \varepsilon_k = \sum_{k=n}^{m-1} 2^{-k}\varepsilon \leq 2^{-n+1}\varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de Cauchy et pour une limite $\xi \in X$ nous avons $d(x_0,\xi) \leq 2\varepsilon$. En outre, $f(x_n)$ converge vers $f(y)$ et la continuité ainsi que l'unicité des limites dans un espace métrique donnent $y = f(\xi) \in f(\overline{B}(x,2\varepsilon))$.

Soient maintenant $A \subseteq X$ ouvert, $x \in A$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}_X(x,2\varepsilon) \subseteq A$. Alors $B_Y(f(x),\delta(\varepsilon)) \subseteq f(\overline{B}_X(x,2\varepsilon)) \subseteq f(A)$ et donc $f(A)$ est ouvert.

Pour démontrer la complétude de $(f(X),D)$, grâce à 2.1(a), il suffit de prouver que chaque suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $D(y_n,y_{n+1}) \leq \delta(2^{-n-1})$ converge. Soit $x_1 \in X$ tel que $y_1 = f(x_1)$. Vu $(*)$ on trouve par récurrence $x_{n+1} \in \overline{B}_X(x_n,2^{-n})$ tel que $f(x_{n+1}) = y_{n+1}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de Cauchy dans X et pour une limite $\xi \in X$ la continuité implique $y_n = f(x_n) \to f(\xi)$. $\square$

Dans le théorème suivant nous appelons une application linéaire T entre deux ELC $(X, \mathscr{P})$ et $(Y, \mathscr{Q})$ *presque ouverte* si $\overline{T(U)}$ est un voisinage de 0 dans Y pour chaque voisinage U de 0 dans X. Pour les familles de semi-normes cela signifie

$$\forall\, p \in \mathscr{P}\ \exists\, q \in \mathscr{Q},\ \varepsilon > 0 \text{ tels que } \overline{T(B_p(0,1))} \supseteq B_q(0,\varepsilon).$$

Si T est continu, le fait que les boules $\overline{B}_q(0,\varepsilon)$ sont fermées implique que pour tout $q \in \mathscr{Q}$ on trouve $p \in \mathscr{P}$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'inclusion inverse est vraie (exceptionnellement, le nombre ε sera grand).

2.8. Théorème des applications ouvertes (Banach).

(a) Soient $(X, \mathscr{P})$ et $(Y, \mathscr{Q})$ deux ELC séparés et $T \in L(X,Y)$ tels que $T(X)$ est de deuxième catégorie dans Y. Alors T est presque ouvert.

(b) Soient $(X, \mathscr{P})$ un espace de Fréchet, $(Y, \mathscr{Q})$ un ELC séparé et $T \in L(X,Y)$ presque ouvert. Alors T est ouvert et surjectif et $(Y, \mathscr{Q})$ est un espace de Fréchet.

(c) Soient X, Y deux espaces de Fréchet et $T \in L(X,Y)$ surjectif. Alors T est ouvert.

Démonstration. (a) Soit $p \in \mathscr{P}$ et $U_n = B_p(0,n)$. Comme $T(X) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T(U_n)$ est de deuxième catégorie une des intérieures de $\overline{T(U_n)}$ n'est pas vide. Pour un point intérieur y la convexité absolue de $\overline{T(U_n)}$ implique que 0 appartient à l'intérieur de $\overline{T(U_n)} - \overline{T(U_n)} = 2\overline{T(U_n)} = 2n\overline{T(B_p(0,1))}$. Cela montre que T est presque ouvert.

(b) Soit $\mathscr{P} \sim \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$, $q_n \in \mathscr{Q}$ et $\varepsilon_n > 0$ tel que $\overline{T(B_{p_n}(0,1))} \supseteq B_{q_n}(0,\varepsilon_n)$. Comme $\mathscr{Q}$ est filtrant on peut supposer $q_n \leq q_{n+1}$ et ainsi $\tilde{\mathscr{Q}} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ est filtrant. Démontrons que $\mathscr{Q} \sim \tilde{\mathscr{Q}}$: Pour $q \in \mathscr{Q}$ et $V = \overline{B_q(0,r)}$ la continuité de T procure $n \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$ tel que $T(B_{p_n}(0,\delta)) \subseteq V$. Comme V est fermé cela donne $B_{q_n}(0,\delta\varepsilon_n) \subseteq \overline{V} = V$. Le théorème 1.5 implique alors $q \leq Cq_n$ pour une constante C.

Soient d et D les métriques construites dans le théorème 2.3 correspondantes à $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$. Comme ces métriques ne dépendent que des différences de vecteurs, l'application T satisfait l'hypothèse du théorème de Schauder 2.7 et ainsi T est ouvert et $(Y, \tilde{\mathscr{Q}})$ est un espace de Fréchet. En particulier, $T(X)$ est un sous-espace ouvert de Y et donc $T(X) = Y$.

(c) résulte de (a), (b) et le théorème de Baire. $\square$

Dans la littérature c'est souvent seulement la partie (c) qu'on appelle le théorème des application ouverte.

Dans le corollaire suivant nous utilisons le symbole $\mathscr{U}_0(X)$ pour le système des voisinages de l'origine dans un ELC X. Une base est donnée par les boules $\overline{B}_p(0,\varepsilon)$, $p \in \mathscr{P}$, $\varepsilon > 0$. La *transposée* d'une opérateur $T \in L(X,Y)$ est $T^* : Y^* \to X^*$, $G \mapsto G \circ T$.

2.9. Corollaire.

Soient X, Y deux espaces de Fréchet et $T \in L(X,Y)$.

(a) T est surjectif si et seulement si

$$\forall\, U \in \mathscr{U}_0(X)\ \exists\, V \in \mathscr{U}_0(Y) \text{ tel que } (T^*)^{-1}(U^\circ) \subseteq V^\circ.$$

(b) Si T est bijectif, alors T est un isomorphisme, i.e. $T^{-1} : Y \to X$ est également continu.

Démonstration. (a) La définition de $T^*(G) = G \circ T$ donne

$$T(U)^\circ = \{G \in Y^* : |G(T(x))| = |T^*(G)(x)| \leq 1 \text{ pour } x \in U\} = (T^*)^{-1}(U^\circ).$$

Si T est surjectif et donc ouvert nous trouvons pour tout $U \in \mathscr{U}_0(X)$ un voisinage $V \in \mathscr{U}_0(Y)$ tel que $V \subseteq T(U)$ et donc $(T^*)^{-1}(U^\circ) \subseteq V^\circ$.

D'autre part, on peut supposer que U et donc aussi $T(U)$ sont absolument convexes. Le corollaire 1.8 (b) implique $\overline{T(U)} = T(U)^{\circ\bullet} = \{y \in Y : |G(y)| \leq 1 \text{ pour tout } G \in T(U)^\circ\}$. Pour $V \in \mathscr{U}_0(Y)$ la condition $(T^*)^{-1}(U^\circ) \subseteq V^\circ$ implique $V \subseteq V^{\circ\bullet} \subseteq \overline{T(U)}$. Cela montre que T est presque ouvert et donc surjectif.

(b) Vu 2.8(b) T est ouvert ce qui implique que l'image inverse par T^{-1} de chaque ouvert $A \subseteq X$ est ouvert dans Y. Cela montre la continuité de T^{-1}. □

2.10. Théorème (Eidelheid).

Soient X un espace de Fréchet et $F_n \in X^*$ linéairement indépendants. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour chaque suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ il existe $x \in X$ tel que $F_n(x) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Pour tout $U \in \mathscr{U}_0(X)$ l'espace $\rangle U^\circ \langle \cap \rangle F_n : n \in \mathbb{N} \langle$ est de dimension finie.

Démonstration. Nous considérons l'espace de Fréchet $Y = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de la suite des semi-normes $q_n(y) = \max\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$. La continuité des F_n implique que l'application linéaire

$$T : X \to Y,\ x \mapsto (F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$$

est continue et la première assertion signifie la surjectivité de T. Afin d'évaluer la caractérisation du corollaire précédent nous déterminons le dual Y^* : Soit $Z = \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : z_n = 0 \text{ sauf pour un nombre fini de } n \in \mathbb{N}\}$. Pour les suites $e_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ nous vérifions que

$$J : Y^* \to Z,\ G \mapsto (G(e_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

est bien-défini, linéaire et bijectif. Pour tout $n < m$ nous avons $q_n(e_m) = 0$ et si G est continu par rapport à q_n nous obtenons $|G(e_m)| \leq Cq_n(e_m) = 0$. Cela montre $(G(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \in Z$. La linéarité ainsi que l'injectivité de J sont immédiate et pour $z = (z_1, \ldots, z_m, 0, \ldots) \in Z$ nous définissons $G_z(y) = \sum\limits_{n=1}^{m} z_n y_n$. Alors G_z est linéaire avec $|G_z| \leq \left(\sum\limits_{n=1}^{m} |z_n|\right) q_m$ et $J(G_z) = z$, et nous obtenons la surjectivité de J. Cette démonstration montre que V° est inclus dans un sous-espace de dimension finie pour tout $V \in \mathscr{U}_0(Y)$ (à savoir de dimension $\leq n$ si $B_{q_n}(0,\varepsilon) \subseteq V$).

Pour la transposée $T^* : Y^* \to X^*$, $G \mapsto G \circ T$ nous obtenons

$$T^* \circ J^{-1} : Z \mapsto X^*, (z_1, \ldots, z_m, 0, \ldots) \mapsto \sum_{n=1}^{m} z_n F_n$$

et comme J est bijectif cela montre $T^*(Y^*) = \rangle F_n : n \in \mathbb{N}\langle$.

Si T est surjectif et $U \in \mathscr{U}_0(X)$ il existe $V \in \mathscr{U}_0(Y)$ tel que $(T^*)^{-1}(U^\circ) \subseteq V^\circ$ et donc l'image inverse de $L = \rangle U^\circ \langle$ est de dimension finie (notez que U° est absolument convexe ce qui implique $(T^*)^{-1}(\rangle U^\circ \langle) = \rangle (T^*)^{-1}(U^\circ)\langle)$. Nous obtenons que

$$L \cap \rangle F_n : n \in \mathbb{N} \langle = L \cap T^*(Y^*) = T^*((T^*)^{-1}(L))$$

est de dimension finie en tant que l'image linéaire d'un espace de dimension finie.

Supposons d'autre part que $L \cap \rangle F_n : n \in \mathbb{N}\langle$ est de dimension finie pour tout $U \in \mathscr{U}_0(X)$ et $L = \rangle U^\circ \langle$. Comme les F_n sont linéairement indépendants, $T^* \circ J^{-1}$ est injectif et donc T^* est injectif ce qui implique que $(T^*)^{-1}(L)$ est de dimension finie. Nous obtenons que $B = (T^*)^{-1}(U^\circ)$ est une partie absolument convexe d'un espace de dimension finie qui ne contient aucune droite (parce que $tF \in U^\circ$ pour tout $t \in \mathbb{K}$ implique $F|_U = 0$ et donc $F = 0$ car U est un voisinage de X). L'image $J(B)$ satisfait la même propriété et nous obtenons $m \in \mathbb{N}$ et $c > 0$ tel que

$$J(B) \subseteq \left\{ z \in Z : z_n = 0 \text{ pour } n > m \text{ et } \sum_{n=1}^{m} |z_n| \leq c \right\} \subseteq J(V^\circ)$$

avec $V = \overline{B}_{q_m}(0, 1/c) \in \mathscr{U}_0(Y)$. L'injectivité de J implique $(T^*)^{-1}(U^\circ) \subseteq V^\circ$ et la surjectivité de T résulte du corollaire précédent. □

2.11. Corollaire (Un théorème de E. Borel).

Pour chaque suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ il existe une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}_0$.

Le corollaire dit que chaque série de puissance $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est une série de Taylor en 0 d'une fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ (il suffit d'appliquer le corollaire à

$y_n = n!a_n$). Pour $a_n = n^n$ on obtient une fonction de classe C^∞ dont la série de Taylor en 0 diverge pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Démonstration. Nous considérons l'espace de Fréchet $X = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$ muni des semi-normes $p_n(f) = \sup\{|f^{(k)}(x)| : |x| \leq n, k \leq n\}$ et les fonctionnelles $F_n(f) = f^{(n)}(0)$. Pour vérifier l'indépendance linéaire et la condition (ii) du théorème de Eidelheid nous démontrons $F_n \in L_n \setminus L_{n-1}$ pour $L_n = \rangle U_n^\circ \langle$ avec $U_n = B_{p_n}(0,1)$ (pour $m > n$ et $a_m F_m + \cdots + a_0 F_0 \in L_n$ la condition implique $a_m F_m \in L_{m-1}$ et donc $a_m = 0$, par récurrence on obtient $a_k = 0$ pour tout $k > n$).

Évidemment $|F_n(f)| \leq p_n(f)$ et en supposant $F_n \in L_{n-1}$ on trouve $c \geq 0$ tel que $|f^{(n)}(0)| \leq c p_{n-1}(f)$ pour tout $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$. Afin d'obtenir une contradiction nous considérons pour $m \geq n$ les fonctions $f_m(x) = e^{imx}/m^{n-1}$. Pour tout $k < n$ et $x \in \mathbb{R}$ nous avons $|f_m^{(k)}(x)| \leq m^k/m^{n-1} \leq 1$ mais $|f_m^{(n)}(0)| = m \to \infty$. □

2.12. Le graphe d'une application.

(a) Soit $(X, \mathfrak{T})$ et $(Y, \mathfrak{S})$ deux espaces topologiques et $X \times Y$ le produit cartésien muni du produit des topologies (tel que $\{A \times B : A \in \mathfrak{T}, B \in \mathfrak{S}\}$ est une base). Le *graphe* d'une application $T : X \to Y$ est l'ensemble

$$\mathrm{G}(T) = \{(x, T(x)) : x \in X\}.$$

(b) Si $T : X \to Y$ est continu et si Y est séparé, alors $\mathrm{G}(T)$ est fermé.

En effet, si $(x, y) \notin \mathrm{G}(T)$ nous avons $T(x) \neq y$ et il existe des voisinages V et W de $T(x)$ et y tels que $V \cap W = \emptyset$. Comme T est continu en x il existe un voisinage U de x tel que $T(U) \subseteq V$ et alors $U \times W$ est un voisinage de (x, y) tel que $T(U) \cap W = \emptyset$ et donc $U \times W \cap \mathrm{G}(T) = \emptyset$.

(c) Si (X, d) et (Y, D) sont deux espaces semi-métriques le graphe d'une application $T : X \to Y$ est fermé si et seulement si pour chaque suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X on a l'implication

$$(x_n \to x \text{ et } T(x_n) \to y) \Rightarrow y = T(x).$$

Notez que la convergence de $T(x_n)$ est une partie de l'hypothèse, la condition exige seulement qu'il n'existe pas de limite différente de $T(x)$. Si D est seulement une semi-métrique mais pas une vraie métrique, il existe $y \neq z$ tels que $D(y, z) = 0$ et dans ce cas même l'application constante $T(x) = y$ n'a pas de graphe fermé.

(d) Dans la démonstration du théorème de Schauder nous n'avons pas utilisé la continuité de l'application mais seulement le fait que le graphe est fermé.

Voici un critère simple et élégant pour vérifier que le graphe d'une application est fermée :

(e) **Critère.** Soit $S : Y \to Z$ une application continue et injective dans un espace topologique séparé Z. Si la composition $S \circ T$ est continue alors $\mathrm{G}(T)$ est fermé.

En effet, l'application $\mathrm{id} \times S : X \times Y \to X \times Z$, $(x, y) \to (x, S(y))$ est injective et continue telle que $(\mathrm{id} \times S)^{-1}(\mathrm{G}(S \circ T)) = \mathrm{G}(T)$. Le graphe de $S \circ T$ est fermé vu (b) et donc $\mathrm{G}(T)$ est fermé.

2.13. Théorème (du graphe fermé, Banach).

Soient $(X, \mathscr{P})$, $(Y, \mathscr{Q})$ *deux espaces de Fréchet et* $T : X \to Y$ *linéaire tel que* $\mathrm{G}(T)$ *est fermé. Alors* T *est continu.*

Démonstration. Nous munissons $X \times Y$ des semi-normes $p \times q(x, y) = \max\{p(x), q(y)\}$. La topologie induite par la famille $\mathscr{P} \times \mathscr{Q} = \{p \times q : p \in \mathscr{P}, q \in \mathscr{Q}\}$ est le produit des topologies induites par $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$. En outre, une suite de $X \times Y$ converge ou est de Cauchy si et seulement si les deux suites des composantes satisfont la même condition. Cela implique que le produit et donc aussi le sous-espace fermé $\mathrm{G}(T)$ sont des espaces de Fréchet. La projection $\pi_X : X \times Y \to X$, $(x, y) \mapsto x$ est continue et donc sa restriction $r = \pi_X|_{\mathrm{G}(T)} : \mathrm{G}(T) \to Y$ est continu et bijective. Vu le théorème des applications ouvertes, r est ouvert et donc son application inverse $r^{-1} : X \to \mathrm{G}(T)$, $x \mapsto (x, T(x))$ est continue. Nous considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}(T) \arrow[r, "j"] & X \times Y \arrow[d, "\pi_Y"] \\
X \arrow[u, "r^{-1}"] \arrow[r, "T"] & Y
\end{tikzcd}$$

avec l'inclusion $j : \mathrm{G}(T) \to X \times Y$ et la projection $\pi_Y : X \times Y \to Y$, $(x, y) \mapsto y$. Comme la composition d'applications continues est continue nous obtenons la continuité de $T = \pi_Y \circ j \circ r^{-1}$. $\square$

2.14. Quelques applications.

(a) Si X, Y sont deux espaces de Fréchet, alors une application linéaire $T : X \to Y$ est continue si et seulement si $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ est continue.

En effet, la condition est nécessaire pour deux ELC quelconques : Pour une partie finie E de Y^* et $q_E(y) = \max\{|G(y)| : G \in E\} \in \sigma(Y, Y^*)$ on obtient $H = \{G \circ T : G \in E\} \subseteq X^*$, et $p_H(x) = \max\{|F(x)| : F \in H\} \in \sigma(X, X^*)$ satisfait $q_E \circ T \leq p_H$. Pour la suffisance de la condition il suffit de remarquer que les topologies faibles sont séparées et donc la continuité faible implique que le graphe de $T : X \to Y$ est fermé.

(b) **Un théorème de Hellinger et Töplitz.**

Un *espace de Hilbert* est un espace de Banach $(H, \|\cdot\|)$ dont la norme vient d'un produit scalaire : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Si $S, T : H \to H$ sont linéaires tels que

$$\langle S(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \text{ pour tous } x, y \in H,$$

alors S et T sont continus.

Démonstration. Soit $x_n \in H$ tel que $x_n \to x$ et $S(x_n) \to z$. Pour tout $y \in H$ nous obtenons de l'inégalité triangulaire la continuité de $x \mapsto \langle x, y\rangle$ et donc

$$\langle z, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S(x_n), y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, T(y)\rangle = \langle x, T(y)\rangle = \langle S(x), y\rangle.$$

Pour $y = z - S(x)$ cela implique $\|z - S(x)\| = 0$ et donc $z = S(x)$. Le graphe de S est donc fermé ce qui implique la continuité de S. En échangeant les rôles de S et T on obtient la continuité de T. □

(c) **Un théorème de Töplitz.**

Pour $A \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ les assertions suivantes sont équivalents :

(α) Pour chaque suite convergente $x_m \to x_\infty$ les séries $T_n(x) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m$ convergent et $T_n(x) \to x_\infty$.

(β) La matrice A satisfait les trois conditions suivantes :

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,m} = 0$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(2) $\sup\left\{\sum\limits_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| : n \in \mathbb{N}\right\} < \infty$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = 1$.

Démonstration. La démonstration de la suffisance de (β) est élémentaire et laissé comme un exercice. La démonstration de la nécessité est due à Banach. On obtient les conditions (1) et (3) en considérant $x = e_m = (\delta_{m,k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $x = e = (1, 1, \ldots)$. Pour démontrer (2) nous considérons l'espace de Banach $c_0 = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : x \to 0\}$ muni de la norme $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$ et les fonctionnelles $T_{n,k}(x) = \sum\limits_{m=1}^{k} a_{n,m} x_m$. Par hypothèse, $\lim\limits_{k\to\infty} T_{n,k}(x) = T_n(x)$ existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in c_0$ et le théorème de Banach-Steinhaus implique

$$C_n = \sup\{|T_{n,k}(x)| : k \in \mathbb{N}, \|x\| \le 1\} < \infty.$$

Il s'ensuit que $T_n : c_0 \to \mathbb{K}$ est linéaire et continu. En outre, $T : c_0 \to c_0$, $x \mapsto (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien-défini par hypothèse et évidemment linéaire. En outre, la continuité des T_n implique que T est continu comme application $c_0 \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ muni de la convergence ponctuelle et vu le critère 2.12(e), le graphe de T est fermé. Le théorème du graphe fermé montre que T est continu et donc $C = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\} < \infty$. En considérant pour $n \in \mathbb{N}$ les signes $x_m = |a_{n,m}|/a_{n,m}$ (avec $x_m = 0$ si $a_{n,m} = 0$) nous obtenons

$$\begin{aligned} C &\ge \sup\left\{\left|\sum_{m=1}^{k} a_{n,m} x_m\right| : n, k \in \mathbb{N}, \|x\| \le 1\right\} \\ &\ge \sup\left\{\sum_{m=1}^{k} |a_{n,m}| : n, k \in \mathbb{N}\right\} = \sup\left\{\sum_{m=1}^{\infty} |a_{n,m}| : n \in \mathbb{N}\right\}. \end{aligned}$$

□

2.15. Encore une application pour les fonctions holomorphes.

(a) Un théorème de Weierstraß dit que la limite localement uniforme de fonctions holomorphes est holomorphe (cela résulte par exemple du fait qu'une fonction continue est holomorphe si et seulement si l'intégrale curviligne sur chaque chemin de Jordan s'annule). Autrement dit,

$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : f \text{ holomorphe}\} \text{ est fermé dans } \mathrm{C}(\mathbb{C}).$$

où $\mathrm{C}(\mathbb{C})$ est muni des semi-normes $p_n(f) = \sup\{|f(z)| : |z| \leq n\}$.

(b) Considérons *l'espace de Köthe*

$$X = \left\{ a \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0} : \|a\|_n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| n^k < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

X est un espace de Fréchet (cf. l'exercice 12) et on peut facilement déterminer son dual X^* : Pour $G \in X^*$ il existe $n \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tel que $|G| \leq C\|\cdot\|_n$ et pour les suites unitaires $e_k = (\delta_{k,\ell})_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ on obtient que $b_k = G(e_k)$ satisfait $|b_k| \leq C\|e_k\|_n = Cn^k$ et ainsi $\sup\{|b_k| n^{-k} : k \in \mathbb{N}\} < \infty$. En outre, $a = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k e_k$ pour tout $a \in X$ et donc $G(a) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

(c) Soit $T : X \to H(\mathbb{C})$, $a \mapsto \left(z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k\right)$. Le rayon de convergence de cette série de puissance est ∞ et donc $T(a)$ est en fait une fonction holomorphe. En utilisons l'inégalité triangulaire on voit que $p_n(T(a)) = \sup\{|T(a)(z)| : |z| \leq n\} \leq \|a\|_n$ et ainsi T est continu. Il résulte d'une version très simple de la formule de Cauchy que chaque $f \in H(\mathbb{C})$ est donné par sa série de Taylor

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k,$$

ce qui montre que T est une bijection entre X et $H(\mathbb{C})$. Vu le théorème des applications ouvertes T est donc un isomorphisme. Le point précédent implique que chaque $F \in H(\mathbb{C})^*$ est de la forme

$$F(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} b_k$$

avec une suite $b \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ telle que $\sup\{|b_k| n^{-k} : k \in \mathbb{N}\} < \infty$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$.

(d) Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ nous considérons $e_\lambda \in H(\mathbb{C})$ défini comme $e_\lambda(z) = \exp(\lambda z)$. Alors, l'enveloppe linéaire de $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ est dense dans $H(\mathbb{C})$ pour tout $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ avec un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. Vu le corollaire 1.8(c) du théorème de Hahn-Banach il suffit de démontrer que le seul $F \in H(\mathbb{C})^*$ avec $F(e_\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ est $F = 0$. Soit donc F une telle fonctionnelle avec une représentation comme dans le point précédent. Comme $e_\lambda(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} z^k$ nous obtenons que

$$g(\lambda) = F(e_\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} \lambda^k$$

s'annule pour $\lambda \in \Lambda$. En outre, $\sup\{|b_k| n^{-k} : k \in \mathbb{N}\} < \infty$ implique que g est holomorphe en tant que série de puissance de rayon de convergence ∞. Comme Λ a un point d'accumulation dans $\mathbb{C}$ la fonction g s'annule partout ce qui implique $b = 0$ et donc $F = 0$. $\square$

2.16. Parties bornées.

(a) Une partie B d'un ELC $(X, \mathscr{P})$ est *bornée* (dans $(X, \mathscr{P})$) si

$$\sup\{p(x) : x \in B\} < \infty$$

pour tout $p \in \mathscr{P}$. Évidemment, l'union *finie* de parties bornées est bornée, et donc chaque partie finie est bornée. En outre, l'enveloppe absolument convexe d'une partie bornée est bornée.

(b) Si $(Y, \mathscr{Q})$ est un autre ELC, alors chaque $T \in L(X, Y)$ est *borné*, i.e. $T(B)$ est borné dans $(Y, \mathscr{Q})$ pour toute partie bornée de X. Cela résulte du fait que pour tout $q \in \mathscr{Q}$ il existe $p \in \mathscr{P}$ et $C \geq 0$ tels que $q \circ T \leq Cp$. Le théorème 2.17 ci-dessous donne beaucoup d'exemples d'applications bornées qui ne sont pas continues. Cependant, nous avons :

(c) Si $(X, \mathscr{P})$ est métrisable et $(Y, \mathscr{Q})$ est un ELC quelconque alors chaque application linéaire et bornée $T : X \to Y$ est continue.

En effet, soit $\mathscr{P} \sim \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec une suite croissante de semi-normes p_n. En supposant que T n'est pas continue nous trouvons $q \in \mathscr{Q}$ et $x_n \in \mathbb{N}$ tel que $p_n(x_n) \leq 1$ mais $q(T(x_n)) \geq n$. L'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est borné : Pour $p \in \mathscr{P}$ il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ tels que $p \leq Cp_m$ et comme la suite des p_n est croissante nous obtenons

$$\begin{aligned} \sup\{p(x_n) : n \in \mathbb{N}\} &\leq C \sup\{p_m(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq C \max\{p_m(x_n) : n \leq m\} \cup \{1\} < \infty. \end{aligned}$$

Comme T est borné cela contredit $q(T(x_n)) \geq n$.

(d) Rappelons que pour un ELC $(X, \mathscr{P})$ avec dual X^* les ELC $(X, \mathscr{P})$ et $(X, \sigma(X, X^*))$ ont le même dual (à savoir X^*) et les mêmes parties convexes fermées. Maintenant nous démontrons qu'ils ont aussi les mêmes parties bornées. Si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé de dimension ∞ la topologie faible est moins fine que la topologie induite par la norme et donc l'identité $(X, \sigma(X, X^*)) \to (X, \|\cdot\|)$ est une application bornée qui n'est pas continue.

2.17. Théorème.

Une partie B d'un ELC $(X, \mathscr{P})$ est bornée si et seulement si elle est bornée dans $(X, \sigma(X, X^*))$.

Démonstration. La nécessité est immédiate car $\sigma(X, X^*) \prec \mathscr{P}$. Pour démontrer la suffisance, nous fixons $p \in \mathscr{P}$ et nous considérons l'espace seminormé $Y = X$ muni de p. Alors le dual (Y^*, p^*) est un espace de Banach, et pour tout $x \in X$, l'évaluation $\delta_x : Y^* \to \mathbb{K}$, $F \mapsto F(x)$ est continue (car $\delta_x(F) \leq p^*(F)p(x)$). Si B est borné dans $(X, \sigma(X, X^*))$ nous obtenons $\sup\{|\delta_x(F)| : x \in B\} < \infty$ pour tout $F \in Y^*$ parce que $q_{\{F\}} = |F| \in \sigma(X, X^*)$. Le théorème de Banach-Steinhaus implique

$$C = \sup\{|\delta_x(F)| : x \in B, p^*(F) \leq 1\} < \infty,$$

et vu le corollaire 1.8(d) du théorème de Hahn-Banach nous avons $C = \sup\{p(x) : x \in B\}$. $\square$

CHAPITRE 3

Compacité

3.1. Théorème (Arzelà-Ascoli).

Soient K un espace topologique compact, $(X, \mathscr{P})$ un ELC séparé et $\mathrm{C}(K, X)$ l'espace de fonctions continues muni des semi-normes $\|f\|_p = \sup\{p(f(x)) : x \in K\}$. Pour une partie $M \subseteq \mathrm{C}(K, X)$ les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) M est relativement compact, i.e. $\overline{M}$ est compacte dans $\mathrm{C}(K, X)$.

(2) M est ponctuellement relativement compact est équicontinu, i.e.
- *L'adhérence de $\{f(x) : f \in M\}$ est compacte dans $(X, \mathscr{P})$ pour tout $x \in K$.*
- *Pour tous $p \in \mathscr{P}$, $x \in K$ et $\varepsilon > 0$ il existe $U \in \mathscr{U}_x(K)$ tel que pour tous $z \in U$ et $f \in M$ on a $p(f(x) - f(z)) \leq \varepsilon$.*

Démonstration. Démontrons d'abord la nécessité de (2). La première condition résulte de la continuité des évaluations $\delta_x : \mathrm{C}(K, X) \to X$, $f \mapsto f(x)$ parce que l'image continue d'un compact est compacte et $\overline{\delta_x(M)} \subseteq \delta_x(\overline{M})$. Pour démontrer l'équicontinuité de M nous fixons $p \in \mathscr{P}$, $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. Pour chaque $f \in \overline{M}$ il existe un voisinage U_f de x tel que $f(U_f) \subseteq B_p(f(x), \varepsilon/4)$. L'ensemble

$$W(f) = \{g \in \mathrm{C}(K, X) : g(U_f) \subseteq B_p(f(x), \varepsilon/2)\}$$

contient chaque $g \in \mathrm{C}(K, X)$ tel que $\|f - g\|_p < \varepsilon/4$ et donc $W(f)$ est un voisinage de f. Comme $\overline{M}$ est compact il existe $f_1, \ldots, f_n \in \overline{M}$ tel que $\overline{M} \subseteq W(f_1) \cup \cdots \cup W(f_n)$. L'intersection finie $U = U_{f_1} \cap \cdots \cap U_{f_n}$ est un voisinage de x qui convient à la définition de l'équicontinuité : Pour tout $g \in M$ il existe $m \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $g \in W(f_m)$ et pour $z \in U \subseteq U_{f_m}$ l'inégalité triangulaire implique

$$p(g(x) - g(z)) \leq p(g(x) - f_m(x)) + p(f_m(x) - g(z)) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2.$$

Pour démontrer la suffisance de (2) nous utilisons le théorème de Tychonov pour les espaces compacts $K_x = \overline{\delta_x(M)}$, $x \in K$. Le produit $(Z, \mathfrak{S}) = \prod\limits_{x \in K} (K_x, \mathfrak{T}_{\mathscr{P}})$ est alors un espace topologique compact et nous démontrons d'abord que $\mathfrak{S}$ (qui est la plus petite topologie telle que les évaluations δ_x

sont continues) coïncide sur $\overline{M}$ avec la topologie $\mathfrak{T}$ induite par les semi-normes $\|\cdot\|_p$, $p \in \mathscr{P}$. La continuité des évaluations par rapport à $\mathfrak{T}$ implique que $\mathfrak{T}$ est plus fin que $\mathfrak{S}$.

Soit d'autre part $W = \{g \in \overline{M} : \|f-g\|_p \leq \varepsilon\}$ un voisinage typique d'une fonction $f \in \overline{M}$. L'équicontinuité s'étend facilement de M à $\overline{M}$ et donc nous trouvons pour tout $x \in K$ un voisinage $U_x \in \mathscr{U}_x(K)$ tel que $p(g(x)-g(z)) \leq \varepsilon/3$ pour tous $z \in U_x$ et $g \in \overline{M}$. Comme K est compact il existe $E \subseteq K$ fini tel que $K = \bigcup\limits_{x\in E} U_x$. L'ensemble

$$V = \{g \in Z : p(f(x)-g(x)) \leq \varepsilon/3 \text{ pour } x \in E\}$$

est un voisinage de f par rapport à la topologie $\mathfrak{S}$, et pour tous $g \in V$ et $z \in U_x$ avec $x \in E$ nous obtenons

$$p(f(z)-g(z)) \leq p(f(z))-f(x)) + p(f(x)-g(x)) + p(g(x)-g(z)) \leq \varepsilon$$

ce qui montre $g \in W$ parce que $K = \bigcup\limits_{x\in E} U_x$.

Nous avons donc démontré que les topologies $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ coïncident sur $\overline{M}$. Pour conclure il suffit de montrer que $\overline{M}$ est fermé dans $(Z,\mathfrak{S})$ (parce qu'un sous-espace fermé d'un espace compact est compact). Comme l'ensemble E trouvé ci-dessus ne dépend que de ε (mais pas de f) l'argument ci-dessus montre que pour chaque fonction $g \in \overline{M}^{\mathfrak{S}}$ il existe une approximation uniforme à ε près par une fonction $f \in \overline{M}^{\mathfrak{T}}$ et donc, $\overline{M}^{\mathfrak{S}} = \overline{M}^{\mathfrak{T}}$. □

3.2. Exemples.

(a) Soient $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compact et $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert tel que $K \subseteq A$. Alors

$$M = \left\{f|_K : f \in \mathrm{C}^1(A),\, \max\{\|f\|_A, \|\partial_j f\|_A : j \in \{1,\ldots,n\}\} \leq 1\right\}$$

est relativement compact dans $C(K)$, i.e. l'adhérence est compact.

En effet, M est évidemment ponctuellement relativement compact et pour démontrer l'équicontinuité nous fixons $x \in K$ et $\varepsilon > 0$. Comme A est ouvert il existe $0 < \delta < \varepsilon/\sqrt{n}$ tel que $B(x,\delta) \subseteq A$. Pour tout $y \in B(x,\delta)$ et $f \in M$ nous considérons $\varphi(t) = f(x+t(y-x))$ et nous obtenons

$$|f(y)-f(x)| = \left|\int_0^1 \varphi'(t)\,dt\right| \leq \int_0^1 |\langle \nabla f(x+t(y-x)), y-x\rangle|\,dt \leq \sqrt{n}\delta$$

parce que $\|\nabla f(z)\| \leq \sqrt{n}\max\{|\partial_j f(z)| : j \in \{1,\ldots,n\}\}$.

(b) Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $K \subseteq \Omega$ compact. Alors

$$M = \{f|_K : f \in H(\Omega),\, \|f\|_\Omega \leq 1\}$$

est relativement compact dans $C(K)$.

En effet, il suffit de démontrer l'équicontinuité. Pour $x \in K$ nous choisissons $r > 0$ tel que $B(x,r) \subseteq \Omega$. Pour $\gamma(t) = x + re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$ nous avons la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

pour tout $z \in B(x, r)$. En estimant

$$\left| \frac{1}{\zeta - x} - \frac{1}{\zeta - z} \right| = \frac{|x - z|}{|\zeta - x||\zeta - z|} \leq \frac{2}{r^2} |x - z|$$

pour $|z - x| \leq r/2$ et $|\zeta - x| = r$ nous obtenons

$$|f(z) - f(x)| \leq \frac{\text{longueur}(\gamma)}{2\pi} \frac{2}{r^2} |x - z| = \frac{2}{r} |x - z|$$

pour tout $f \in M$ et donc l'équicontinuité.

3.3. Opérateurs compacts.

(a) Une application linéaire T entre deux ELC séparés X et Y est appelée compacte s'il existe un voisinage $U \in \mathscr{U}_0(X)$ tel que $T(U)$ est relativement compact dans Y. Nous dénotons l'ensemble des applications compactes par $\mathscr{K}(X, Y)$ et nous écrivons $\mathscr{K}(X) = \mathscr{K}(X, X)$.

(b) Chaque $T \in \mathscr{K}(X, Y)$ est continu. En outre, la composition d'un opérateur compact et d'une application linéaire continue est compacte et chaque combinaison linéaire d'opérateurs compacts est compacte.

(c) Si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors $T : X \to Y$ est compact si et seulement si $\overline{T(B_X)}$ est compact dans Y, où $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ dénote la boule unitaire.

(d) Le théorème 1.11 implique que chaque $T \in L(X, Y)$ avec $\dim T(X) < \infty$ est compact si Y est séparé. En outre les exemples 3.2 montrent que les restrictions

$$\mathrm{C}^1(\Omega) \to \mathrm{C}(K) \text{ et } H(\Omega) \to C(K)$$

sont compactes.

(e) Soient K un espace topologique compact et μ une mesure finie sur la σ-algèbre de Borel de K. Pour une fonction continue $k \in \mathrm{C}(K \times K)$ nous définissons

$$T : \mathrm{C}(K) \to \mathrm{C}(K) \text{ par } (Tf)(x) = \int_K f(y) k(x, y) \, d\mu(y).$$

Alors $T \in \mathscr{K}(\mathrm{C}(K))$.

En effet, nous démontrons que l'image de la boule unitaire $U = \{f \in \mathrm{C}(K) : \|f\|_K \leq 1\}$ est relativement compacte. Vu le théorème de Arzelà-Ascoli il suffit de démontrer que $M = T(U)$ est ponctuellement relativement compact et équicontinu. Pour $x \in K$ nous avons

$$\{|(Tf)(x)| : f \in U\} \leq \sup\{|k(x, y)| : y \in K\} \mu(K) < \infty.$$

En outre, pour $x \in K$ et $z \in K$ nous estimons

$$\begin{aligned}|(Tf)(x) - (Tf)(z)| &\leq \int |f(y)||k(x,y) - k(z,y)|\, d\mu(y) \\ &\leq \mu(K) \sup\{|k(x,y) - k(z,y)| : y \in K\},\end{aligned}$$

et la continuité uniforme de k implique que ceci est $\leq \varepsilon$ si z est suffisamment proche de x.

(f) Si dans le point précédent, $k(x,y) = g(x-y)$ pour un groupe compact K et $g \in \mathrm{C}(K)$ l'opérateur T est une convolution.

3.4. Théorème (Schauder).

Soient X, Y deux espaces de Banach et $T \in L(X,Y)$. Alors, T est compact si et seulement si $T^* : Y^* \to X^*$, $F \mapsto F \circ T$ est compact où X^* et Y^* sont munis des normes duales $\|F\|^* = \sup\{|F(x)| : \|x\| \leq 1\}$.

Démonstration. Démontrons d'abord la nécessité. Vu le théorème de Alaoğlu $B_{Y^*} = B_Y^\circ$ est $\sigma(Y^*, Y)$-compact et comme T^* est continu par rapport aux topologies faibles-$*$ l'image $T^*(B_Y^\circ)$ est $\sigma(X^*, X)$-compacte. Il suffit alors de démontrer que les topologies induites par $\|\cdot\|^*$ et $\sigma(X^*, X)$ coïncident sur $T^*(B_Y^\circ)$. Évidemment, la norme donne une topologie plus fine. Pour démontrer l'autre inclusion nous fixons $\varphi \in T^*(B_Y^\circ)$ et $\varepsilon > 0$.

Comme $\overline{T(B_X)}$ est compact et inclus dans $\bigcup_{x \in B_X} B(T(x), \varepsilon/3)$ il existe $E \subseteq B_X$ fini tel que $T(B_X) \subseteq \bigcup_{x \in E} B(T(x), \varepsilon/3)$. L'ensemble

$$U = \{\psi \in T^*(B_Y^\circ) : |\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon/3 \text{ pour } x \in E\}$$

est un voisinage de φ par rapport à $\sigma(X^*, X)$ qui est inclus dans $B_{\|\cdot\|^*}(\varphi, \varepsilon)$: En effet, pour $\psi \in U$ il existe $F, G \in B_Y^\circ$ tels que $\varphi = F \circ T$ et $\psi = G \circ T$, et pour tout $y \in B_X$ il existe $x \in E$ tel que $\|T(y) - T(x)\| < \varepsilon/3$. Nous obtenons

$$|\varphi(y) - \psi(y)| \leq |F(T(y-x))| + |G(T(y-x))| + |\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$$

et donc $\|\varphi - \psi\|^* \leq \varepsilon$.

Soit maintenant $T^* \in \mathscr{K}(Y^*, X^*)$. L'implication déjà démontrée montre la compacité de $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$. Soit $\Delta_X : X \to X^{**}$, $x \mapsto \delta_x$ l'isométrie introduite dans le corollaire 1.8(d) et $\Delta_Y : Y \to Y^{**}$ défini de manière similaire. Pour tout $x \in X$ nous avons

$$\big(T^{**} \circ \Delta_X\big)(x) = T^{**}(\delta_x) = \delta_x \circ T^* = \delta_{T(x)} = \big(\Delta_Y \circ T\big)(x)$$

et donc $\Delta_Y \circ T = T^{**} \circ \Delta_X : X \to Y^{**}$ est compact. Comme Y est un espace de Banach et Δ_Y est une isométrie, $\Delta(Y)$ est fermé dans Y^{**} et donc $\Delta_Y(\overline{T(B_X)}^{Y^{**}}) = \Delta(\overline{T(B_X)}^{Y})$. Comme Δ_Y est une isométrie cela implique la compacité de $\overline{T(B_X)}^{Y}$. $\square$

3.5. Théorème.

Soient X un espace de Banach, $T \in \mathscr{K}(X)$ et $S(x) = T(x) - x$. Le noyau $\mathscr{N}(S)$ est de dimension finie et l'image $\mathscr{I}(S)$ est fermée.

Démonstration. Comme l'adhérence de $T(B_X)$ est compacte dans X le voisinage de l'origine $B_X \cap \mathscr{N}(S) = T(B_X) \cap \mathscr{N}(S)$ est compact et le théorème 1.11(e) implique $\dim(\mathscr{N}(S)) < \infty$.

Pour prouver que $\mathscr{I}(S)$ est fermé nous démontrons

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que } \varepsilon B_X \cap S(B_X) \subseteq \tfrac{1}{2} S(B_X). \qquad (*)$$

En effet, en supposant le contraire nous trouvons $x_n = T(y_n) - y_n \in S(B_X)$ avec $y_n \in B_X$ tels que $\|x_n\| \leq 1/n$ et $x_n \notin \frac{1}{2}S(B_X)$. Comme l'adhérence de $T(B_X)$ est compacte, en passant à une sous-suite, on peut supposer que $T(y_n)$ converge dans X vers un élément z. Comme $x_n \to 0$ nous obtenons $y_n = T(y_n) - x_n \to z$ et $S(z) = \lim\limits_{n\to\infty} T(y_n) - y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Pour n suffisamment grand nous avons donc $y_n - z \in \frac{1}{2}B_x$ et $x_n = S(y_n) = S(y_n - z) \in \frac{1}{2}S(B_X)$.

Par récurrence, l'inclusion $(*)$ donne $\varepsilon B_X \cap 2^n S(B_X) \subseteq S(B_X)$ et donc $\varepsilon B_X \cap \mathscr{I}(S) \subseteq S(B_X)$. Cela montre que $S : X \to S(X)$ est un opérateur ouvert (et donc presque ouvert) et le théorème des applications ouvertes 2.8(b) implique que $S(X)$ est complet et donc fermé. □

3.6. Sommes directes.

(a) Soient L, H deux sous-espaces d'un ELC X tels que $L \cap H = \{0\}$. Si $L + H = \{y + z : y \in L, z \in H\} = X$ nous écrivons $X = L \oplus H$ et nous appelons X la somme directe de $L + H$.

(b) Comme $L \cap H = \{0\}$ il existe, pour tout $x \in X$, une décomposition *unique* $x = y + z$ avec $y \in L$ et $z \in H$. L'unicité implique que les applications

$$P_L : X \to L \text{ et } P_H : X \to H \text{ définies par } P_L(x) + P_H(x) = x$$

sont linéaires. On appelle $X = L \oplus H$ une somme directe *topologique* si les deux applications P_L et P_H sont continues.

(c) Si $X = L \oplus H$ est un espace de Fréchet et si L et H sont fermés le théorème des application ouvertes implique que $L \times H \to X$, $(y, z) \mapsto y + z$ est ouvert et donc un isomorphisme. La continuité des projections $L \times H \to L$ et $L \times H \to H$ implique que la somme directe est topologique.

(d) La *codimension* d'un sous-espace H de X est $\operatorname{codim}(H) = \dim\big(X/H\big)$ où $X/H = \{x + H : x \in X\}$ dénote le quotient de X modulo H, i.e. l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $x \sim y$ si $x - y \in H$. Si $X = L \oplus H$ l'application $L \to X/H$, $x \mapsto x + H$ est un isomorphisme et donc $\operatorname{codim}(H) = \dim(L)$.

Le théorème suivant dit que chaque *perturbation compacte* $S(x) = T(x) - x$ de l'identité *est un isomorphisme à un sous-espace de dimension finie près.*

3.7. Théorème.

Soient $T \in \mathscr{K}(X)$ *avec un espace de Banach* X *et* $S(x) = T(x) - x$*. Alors il existe deux sous-espaces fermés* L *et* H *tels que* $X = L \oplus H$ *est une somme directe topologique,* $\dim(L) = \operatorname{codim}(H) < \infty$, $S|_H : H \to H$ *est inversible et* $S|_L : L \to L$ *satisfait* $(S|_L)^n = S|_L \circ \cdots \circ S|_L = 0$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons $S^n(x) = R_n(x) + (-1)^n x$ avec l'opérateur

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T^k \in \mathscr{K}(X).$$

Vu le théorème précédent $\dim(\mathscr{N}(S^n)) < \infty$ et $\mathscr{I}(S^n)$ est fermé. En outre nous avons $\mathscr{N}(S^n) \subseteq \mathscr{N}(S^{n+1})$ et $\mathscr{I}(S^{n+1}) \subseteq \mathscr{I}(S^n)$.

Démontrons d'abord qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{N}(S^n) = \mathscr{N}(S^{n+1})$ $(*)$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{I}(S^m) = \mathscr{I}(S^{m+1})$ $(\#)$.

En effet, si $(*)$ est faux il existe $a_n \in \mathscr{N}(S^{n+1}) \setminus \mathscr{N}(S^n)$. Comme ce dernier espace est fermé nous avons $d_n = \operatorname{dist}(a_n, \mathscr{N}(S^n)) > 0$ et l'homogénéité de la norme implique $\operatorname{dist}(d_n^{-1} a_n, \mathscr{N}(S^n)) = 1$. Soient $b_n \in \mathscr{N}(S^n)$ tel que $\|d_n^{-1} a_n - b_n\| \leq 2$ et $x_n = d_n^{-1} a_n - b_n \in \mathscr{N}(S^{n+1})$. Alors $\operatorname{dist}(x_n, \mathscr{N}(S^n)) = 1$ et $\|x_n\| \leq 2$. Pour tout $n < m$ nous avons

$$S^m(S(x_m) - x_n - S(x_n)) = 0 \text{ et donc } S(x_m) + x_n - S(x_n) \in \mathscr{N}(S^m).$$

Il s'ensuit $\|T(x_m) - T(x_n)\| = \|x_m + (S(x_m) - x_n - S(x_n))\| \geq 1$ ce qui contredit le fait que $T(2B_X)$ est relativement compact.

Si $(\#)$ est faux, comme $\mathscr{I}(S^{m+1}) \subseteq \mathscr{I}(S^m)$ et cet espace est fermé, on trouve avec le même argument que précédemment $x_m \in \mathscr{I}(S^m)$ tel que $\|x_m\| \leq 2$ et $\operatorname{dist}(x_m, \mathscr{I}(S^{m+1})) = 1$. Pour tout $k > m$ on obtient alors

$$\|T(x_m) - T(x_k)\| = \|x_m + (S(x_m) - x_k - S(x_k))\| \geq 1$$

parce que $S(x_m) - x_k - S(x_k) \in \mathscr{I}(S^{m+1})$. Encore une fois, cela contredit la compacité de T.

Par récurrence, les propriétés $(*)$ et $(\#)$ donne $\mathscr{N}(S^{n+k}) = \mathscr{N}(S^n)$ et $\mathscr{I}(S^{m+k}) = \mathscr{I}(S^m)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en passant au maximum de n et m nous pouvons supposer $n = m$ dans la suite.

Nous posons $L = \mathscr{N}(S^n)$ et $H = \mathscr{I}(S^n)$. Le théorème précédent implique que L et H sont fermés et que $\dim(L) < \infty$. En outre,

$$S(L) = S(\mathscr{N}(S^n)) = S(\mathscr{N}(S^{n+1})) \subseteq \mathscr{N}(S^n) = L$$

et, par construction, $(S|_L)^n = 0$. En outre,

$$S(H) = \mathscr{I}(S^{n+1}) = \mathscr{I}(S^n) = H$$

ce qui montre que $S|_H : H \to H$ est surjectif. Pour $x = S^n(y) \in H$ avec $S(x) = 0$ nous avons $y \in \mathscr{N}(S^{n+1}) = \mathscr{N}(S^n)$ et donc $x = S^n(y) = 0$. Cela montre que $S|_H$ est bijectif et donc un isomorphisme vu le théorème des applications ouvertes. Comme $S^n|_H$ est également bijectif nous obtenons $L \cap H = \{0\}$. Pour démontrer $X = L \oplus H$ nous fixons $x \in X$. Alors $S^n(x) \in \mathscr{I}(S^n) = \mathscr{I}(S^{2n})$ et on trouve $y \in X$ avec $S^n(x) = S^{2n}(y)$ ce qui implique

$$x = (x - S^n(y)) + S^n(y) \in L + H.$$

Comme L et H sont fermés la somme directe $X = L \oplus H$ est topologique. $\square$

3.8. Le spectre.

(a) Soient X un espace de Banach et $T \in L(X, X)$. Le *spectre* de T est

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda : x \mapsto T(x) - \lambda x \text{ n'est pas inversible}\}.$$

Notez que, vu le théorème des applications ouvertes, l'inversibilité comme opérateur continu est équivalente à la bijectivité.

(b) Un nombre $\lambda \in \mathbb{K}$ est appelé une *valeur propre* (en anglais on dit « eigen value » à cause du mot allemand *eigen* pour propre) de T si le nouyau $\mathscr{N}(T - \lambda)$ est différent de $\{0\}$.

Évidemment, chaque valeur propre appartient à $\sigma(T)$. Si $\dim(X) < \infty$ tout élément du spectre est une valeur propre. Par contre, si $\dim(X) = \infty$ ceci n'est plus le cas :

(c) $X = \ell_2$ est un espace de Banach et $T : \ell_2 \to \ell_2$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\frac{1}{n}x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est linéaire, continu et injectif, et donc 0 n'est pas une valeur propre. Mais comme $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient pas à l'image $\mathscr{I}(T)$, l'opérateur T n'est pas inversible, i.e. $0 \in \sigma(T)$.

Comme $T \in \mathscr{K}(\ell_2)$ (cf. l'exercice 23) le fait $0 \in \sigma(T)$ résulte aussi du point suivant :

(d) Si $T \in \mathscr{K}(X)$ et $\dim(X) = \infty$, alors $0 \in \sigma(T)$.

En effet, si T est inversible on obtient que l'identité $I = T \circ T^{-1}$ est compact. Le théorème 1.11(e) implique alors $\dim(X) < \infty$.

(e) Un opérateur $T \in L(X, X)$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = T \circ \cdots \circ T = 0$. Dans ce cas on a $\sigma(T) = \{0\}$.

En effet, T n'est pas injectif et donc $0 \in \sigma(T)$. Soit d'autre part $\lambda \neq 0$. Alors on vérifie facilement que $S = \frac{-1}{\lambda} \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda^{-k} T^k$ est l'inverse de $T - \lambda$. Formellement, le calcul est le même que celui utilisé pour la série géométrique $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$, vu la nilpotence on n'a pas de problème de convergence.

3.9. Corollaire.

Soient X un espace de Banach et $T \in \mathscr{K}(X)$. Alors chaque $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ est une valeur propre et il existe deux sous-espaces fermés L_λ et H_λ tels que

(i) $X = L_\lambda \oplus H_\lambda$,

(ii) $\dim(L_\lambda) = \operatorname{codim}(H_\lambda) < \infty$,

(iii) $(T-\lambda)|_{H_\lambda}$ *est un isomorphisme et* $(T-\lambda)|_{L_\lambda}$ *est nilpotent sur* L_λ.

En outre, $\sigma(T)$ est compact.

Démonstration. Le théorème 3.7 pour l'opérateur compact $\lambda^{-1}T$ procure les espaces L_λ et H_λ avec les propriétés décrites dans le corollaire. On a $L_\lambda \neq \{0\}$ parce que sinon, $X = H_\lambda$ et donc $T - \lambda$ est inversible. Comme la restriction de $T - \lambda$ sur L_λ est nilpotent, $T - \lambda$ n'est pas injectif et donc λ est une valeur propre.

Démontrons encore que $\sigma(T)$ est compact (d'ailleurs, cela est correct pour un opérateur continu quelconque). Montrons d'abord que le spectre $\sigma(T)$ est fermé. Comme il contient $\{0\}$ il suffit de montrer que chaque limite $\lambda \neq 0$ d'une suite de $0 \neq \lambda_n \in \sigma(T)$ appartient au spectre. Choisissons $x_n \in \mathscr{N}(T - \lambda_n)$ tels que $\|x_n\| = 1$. En passant à une sous-suite on peut supposer que $T(x_n) = \lambda_n x_n$ converge vers un vecteur $x \in X$ et comme $\lambda_n \to \lambda$ nous obtenons $\lambda x_n \to x$ et donc

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(\lambda x_n) = \lim_{n\to\infty} \lambda T(x_n) = \lambda x.$$

En outre $\|x\| = |\lambda| \neq 0$ et donc x est un vecteur propre correspondant à λ.

Soit finalement, $c = \|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}$. Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ il existe un vecteur propre $\|x\| \leq 1$ et donc $|\lambda| = \|\lambda x\| = \|T(x)\| \leq c$ ce qui montre que $\sigma(T)$ est borné. □

Remarque Comme chaque $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ est une valeur propre nous obtenons *l'alternative de Fredholm* : Pour tout $\lambda \neq 0$

$$T - \lambda \text{ injectif } \Leftrightarrow T - \lambda \text{ surjectif.}$$

Pour l'équation $T(x) - \lambda x = y$ il y a donc seulement deux cas possibles :

- Pour tout $y \in X$ il existe *une seule* solution,
- Il existe $y \in X$ sans solution *et* il existe $\tilde{y} \in X$ avec plusieurs solutions.

3.10. Théorème.

Soit $T \in \mathscr{K}(X)$ un opérateur compact sur un espace de Banach de dimension infinie. Alors il existe une suite $\lambda_n \to 0$ telle que $\sigma(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$.

Démonstration. Nous démontrons

$$\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \Rightarrow \exists \varepsilon = \varepsilon_\lambda > 0 \text{ tel que } B(\lambda, \varepsilon) \setminus \{\lambda\} \subseteq \mathbb{K} \setminus \sigma(T). \qquad (*)$$

Si $\lambda \notin \sigma(T)$ cela résulte du fait que le spectre est fermé. Soient d'autre part $\lambda \in \sigma(T)$ et L_λ et H_λ comme dans le corollaire 3.9. Comme la restriction de $T-\lambda$ sur H_λ est un isomorphisme nous avons $\lambda \notin \sigma(T|_{H_\lambda})$ et comme cette restriction est encore une fois un opérateur compact sur un espace de Banach le spectre est fermé. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $(T-\mu)|_{H_\lambda}$ est un isomorphisme pour tout $\mu \in B(\lambda, \varepsilon)$. En outre, $(T-\lambda)|_{L_\lambda}$ est nilpotent et donc le spectre de cette restriction est $\{0\}$, i.e. $(T-\mu)|_{L_\lambda}$ est inversible pour tout $\mu \neq \lambda$. Comme $X = L_\lambda \oplus H_\lambda$ cela montre l'inversibilité de $T-\mu$ pour tout $\mu \in B(\lambda, \varepsilon) \setminus \{\lambda\}$.

Comme $\sigma(T)$ est compact et donc inclus dans $B(0,c)$ pour une constante $c \geq 0$ et comme

$$\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} : \tfrac{1}{m} \leq |\lambda| \leq c\} \subseteq \bigcup_{1/m \leq |\lambda| \leq c} B(\lambda, \varepsilon_\lambda)$$

nous obtenons que $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K} : \frac{1}{m} \leq |\lambda| \leq c\}$ est fini pour tout $m \in \mathbb{N}$. La conclusion en découle en ordonnant ces parties finies en une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

3.11. Espaces de Hilbert.

(a) La théorie développée dans ce chapitre a des conséquences plus concrètes si X est un espace de Hilbert, i.e. la norme vient d'un produit scalaire : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

(b) On appelle un opérateur *autoadjoint* si $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle$ pour tous $x, y \in X$. Le théorème de Hellinger-Töplitz 2.14(b) dit que cette condition algébrique implique la continuité de T.

(c) Si $T \in L(X,X)$ est autoadjoint nous avons

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{|\langle T(x), x\rangle| : \|x\| \leq 1\}.$$

Démonstration. Comme T est autoadjoint on a

$$\overline{\langle T(x), x\rangle} = \langle x, T(x)\rangle = \langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$$

pour tout $x \in X$. En outre l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre $\|T(x)\| = \sup\{|\langle T(x), y\rangle| : \|y\| \leq 1\}$ et on obtient que la borne supérieure c à droite et inférieure ou égale à $\|T\|$.

En outre, un calcul facile montre

$$\Re(\langle T(x), y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle\big).$$

Si $\|x\|$, $\|y\| \leq 1$ nous choisissons $|\lambda| = 1$ tel que $|\langle T(x), y\rangle| = \Re(\langle T(x), \lambda y\rangle)$ afin d'obtenir

$$\begin{aligned} |\langle T(x), y\rangle| = \Re(\langle T(x), \lambda y\rangle &\leq \frac{c}{4}\big(\|x+\lambda y\|^2 + \|x-\lambda y\|^2\big) \\ &= \frac{c}{4}\big(2\|x\|^2 + 2\|\lambda y\|^2\big) \leq c. \end{aligned}$$

Cela montre $\|T\| \leq c$. $\square$

3.12. Théorème.

Soit X un espace de Hilbert de dimension ∞ et $T \in \mathscr{K}(X)$ autoadjoint.

(a) $\|T\|$ ou $-\|T\|$ appartient à $\sigma(T)$.

(b) Il existe une suite réelle $\lambda_n \to 0$ et $e_n \in B_X$ tels que $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ pour $n \neq m$ et

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n \text{ pour tout } x \in X.$$

Démonstration. (a) Comme $0 \in \sigma(T)$ il suffit de démontrer le cas où $c = \|T\| > 0$ et vu 3.11(c) on peut supposer $c = \sup\{\langle T(x), x \rangle : \|x\| \leq 1\}$ (sinon, on considère $-T$). Nous choisissons $\|x_n\| \leq 1$ tels que $\langle T(x_n), x_n \rangle \to c$ et vu la compacité de T nous pouvons supposer en plus que $T(x_n)$ converge. Comme

$$\begin{aligned} \|T(x_n) - cx_n\|^2 &= \|T(x_n)\|^2 - 2c\langle T(x_n), x_n \rangle + c^2\|x_n\|^2 \\ &\leq 2c^2 - 2c\langle T(x_n), x_n \rangle \to 0 \end{aligned}$$

la suite x_n converge également et sa limite $x \in X$ satisfait $\langle T(x), x \rangle = c > 0$. La continuité de T montre

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} cx_n = cx$$

et donc c est une valeur propre de T.

(b) Pour tout $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ nous considérons l'espace propre $E_\lambda = \mathscr{N}(T - \lambda) \neq \{0\}$. Pour $\lambda \neq \mu$, $x \in E_\lambda \setminus \{0\}$ et $y \in E_\mu$ nous obtenons

$$\lambda\langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \overline{\mu}\langle x, y \rangle.$$

Le même calcul montre $\lambda\|x\|^2 = \overline{\lambda}\|x\|^2$ et donc $\lambda \in \mathbb{R}$, et il s'ensuit que $\langle x, y \rangle = 0$. Vu la construction dans la démonstration du théorème 3.7 nous avons $L_\lambda = \mathscr{N}((T - \lambda)^n)$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Mais le fait que T est autoadjoint donne $n = 1$, car $(T - \lambda)^{2k}(x) = 0$ implique

$$\|(T - \lambda)^k(x)\|^2 = \langle (T - \lambda)^k(x), (T - \lambda)^k(x) \rangle = \langle x, (T - \lambda)^{2k}(x) \rangle = 0.$$

Par récurrence cet argument implique $n = 1$. Autrement dit, l'espace L_λ du corollaire 3.9 est l'espace propre E_λ.

Pour faciliter l'écriture dans la suite, nous supposons que $\sigma(T)$ est infini. Vu le théorème 3.10 on peut choisir une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $|\lambda_n|$ décroît vers 0 et chaque valeur propre $\lambda \neq 0$ apparaît $\dim(E_\lambda)$ fois dans cette suite. En outre nous choisissons des bases orthonormées de E_λ (par exemple, en utilisant la méthode de Gram-Schmidt) et nous obtenons une suite orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $T(e_n) = \lambda_n e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient M l'adhérence de l'enveloppe linéaire de $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, $M^\perp = \{z \in X : \langle z, x\rangle = 0$ pour tout $z \in M\}$ et

$$P : X \to X,\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n.$$

Montrons que la série converge pour tout $x \in X$: On a $\langle x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n, e_k\rangle = 0$ pour tout $m \geq k$ et donc le théorème de Pythagore implique

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \Big\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n \Big\|^2 + \Big\| \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n \|^2 \\ &= \Big\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n \Big\|^2 + \sum_{n=1}^{m} |\langle x, e_n\rangle|^2 \geq \sum_{n=1}^{m} \|\langle x, e_n\rangle e_n\|^2.\end{aligned}$$

Cela montre que les sommes finies dans la définition de $P(x)$ forment une suite de Cauchy. En outre, encore une fois le théorème de Pythagore implique

$$\Big\| x - \sum_{n=1}^{m} \langle x, e_n\rangle e_n \Big\|^2 \leq \Big\| x - \sum_{n=1}^{m} c_n e_n \Big\|^2$$

pour tout $c_n \in \mathbb{K}$, et pour $x \in M$ cela implique $P(x) = x$. (On a démontré que P est la-dite *projection orthogonale* sur M).

Pour tout $z \in M^\perp$ nous avons

$$\langle T(z), e_n\rangle = \langle z, T(e_n)\rangle = \langle z, \lambda_n e_n\rangle = \lambda_n \langle z, e_n\rangle = 0$$

ce qui montre $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$. On a démontré que la restriction de T sur $M^\perp$ est un opérateur compact autoadjoint et vu la première partie, soit la norme soit le négatif de la norme appartient au spectre. Pourtant, comme chaque élément non-nul du spectre est une valeur propre de la restriction et donc aussi une valeur propre de T lui-même, il s'ensuit que la norme de la restriction est 0, i.e. $T|_{M^\perp} = 0$.

Pour $x \in X$ nous avons $x = P(x) + (x - P(x)) \in M \oplus M^\perp$, et la continuité de T donne finalement

$$T(x) = T(P(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n\rangle T(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n.$$

$\square$