J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
16.12.2009

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 8
Abgabe: Mittwoch, 06.01.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x_∞ konvergente Folge. Zeigen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mitteln $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ ebenfalls gegen x_∞ konvergiert. Beweisen Sie außerdem, dass die umgekehrte Implikation im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2

(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge strikt positiver Zahlen. Beweisen Sie:
Falls die Quotienten $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ gegen q konvergieren, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = q$.

(ii) Beweisen Sie, dass die durch $x_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ definierte Folge konvergiert.

Hinweis Für $\varepsilon > 0$ und ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ zeige man $x_{n+m} \le (q+\varepsilon)^m x_n = (q+\varepsilon)^{n+m}\dfrac{x_n}{(q+\varepsilon)^n}$ für alle m, sowie eine analoge untere Abschätzung.

Aufgabe 3
Sei wieder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge strikt positiver Zahlen und s die Folge der Partialsummen $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$. Zeigen Sie mithilfe des Cauchy-Kriteriums, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ genau dann konvergiert, wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{s_n}$ konvergiert.

Aufgabe 4

(i) Berechnen Sie den Limes superior und den Limes inferior der durch
$x_n = \begin{cases} \frac{1}{k}, \text{ falls } n = k! \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ 2 + (-1)^n, \text{ sonst} \end{cases}$ definierten Folge x.

(ii) Seien $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zwei beschränkte Folgen. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\limsup_{n\to\infty}(x_n + y_n) \le \limsup_{n\to\infty} x_n + \limsup_{n\to\infty} y_n.$$

Finden Sie ein Beispiel dafür, dass die Gleichheit im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 5

Zeigen Sie für $z \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{N}$, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^p z^n$ genau dann konvergiert, wenn $|z| < 1$.

Bitte wenden Bitte wenden

Bonusaufgabe 1 [5 Bonuspunkte]

Berechnen Sie für $|z| < 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$.

Hinweis $n + 1 = \sum_{k=0}^{n} 1$.

Bonusaufgabe 2 [5 Bonuspunkte]
Die Babylonier benutzten ein sexagesimales Zahlensystem (auf 60-er Basis). Da wir nicht ihre Keilschrift lernen wollen, benutzen wir folgende Symbolik:

(i) 0-9 für die ersten 10 Ziffern (0 eingeschlossen)

(ii) A-Z für die folgenden 26 Ziffern 10 bis 35

(iii) α-ω für die letzten 24 Ziffern 36-59

Stellen Sie die Dezimalzahlen 12 019 166 068 und 3 292 109 im babylonischen Zahlensystem. Begründen Sie Ihr Ergebnis mit einer Rechnung.
Hinweis Die erste Zahl ist gleich $15 \cdot 60^5 + 27 \cdot 60^4 + 24 \cdot 60^3 + 17 \cdot 60^2 + 14 \cdot 60 + 28$.

Schöne Weihnachten, und einen guten Rutsch ins Jahr $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2009}{2010}\right)^n$.