# Einführung in die Mathematik

Jochen Wengenroth

Universität Trier

## Organisatorisches

- Die Folien dieser Vorlesung finden Sie ausnahmsweise auf http://www.math.uni-trier.de/∼wengenroth/
- Die Veranstaltung richtet sich an Studierende der Wirtschafts- und Angewandten Mathematik im ersten Semester.
- Bitte melden Sie sich im LSF für diese Vorlesung an.
- Termine:
  - Vorlesung: Mo 10 – 12 HS9, Mi 12 – 14 HS9, Do 12 – 14 HS10
  - Übung: Mi 14 – 16 E52, Do 16 – 18 E52
  - Die Übung findet in zwei Gruppen statt, sie sollen nur einen der Termine wahrnehmen.
- Die VL ist im Prinzip fünfstündig, so dass im Mittel jede zweite Woche ein Termin ausfällt. Dies wird in der Vorlesung und auf der homepage bekannt gegeben. Bald wahrscheinlich auch Stud.IP
- Das Modul Analysis besteht aus dieser Veranstaltung sowie der "Analysis einer und mehrerer Veränderlicher" im kommenden Semester. Die mündliche Modulprüfung ist nach dem Sommersemester. Voraussetzung für die Teilnahme daran sind
  - Regelmäßige Mitarbeit bei den Übungen
  - Klausur nach diesem Wintersemester
- Im (leicht irreführenden) Modulhandbuch steht für das Modul Analysis: Workload 600 h, Kontaktzeit 210 h, Selbststudium/Gruppenarbeit 390 h

# Organisatorisches

- Zur Unterstützung der Gruppenarbeit werden Tutorien angeboten. Darin sollen in kleinen Gruppen alle zwei Wochen Beispiele bearbeitet und Fragen zur Vorlesung diskutiert werden.
- Für den Erfolg der Tutorien sind Sie verantwortlich! Die Tutoren unterstützen Sie.
- Organisation
  Sobald geeignete Räume gefunden sind werden voraussichtlich über Stud.IP 10 Veranstaltungen mit Teilnehmerbeschränkungen und Anmeldedatum (frühestens Mittwoch nach der Übung) angelegt. Die Aufteilung auf die Gruppen erfolgt nach "first come – first serve".
- Mitarbeit an den Übungen bedeutet Anfertigen und Abgeben von Hausaufgaben. Im Normalfall haben Sie zwei Wochen für eine Aufgabenblatt Zeit. Die abgegebenen Lösungen werden mit Punkten bewertet. Teilnahmevoraussetzung für die Klausur ist eine Quote von $x\%$, wobei $x \leq 50$ im Laufe des Semesters präzisiert wird.

# Tipps zur Arbeitsweise

- Es gibt ein Vorlesungsskript aus dem WS 2009/10. Das kann die Teilnahme an der Vorlesung nicht ersetzen!
- Schreiben Sie während der Vorlesung und Übung mit!
- Arbeiten Sie Ihre Mitschrift nach. Bei Unklarheiten vergleichen Sie mit dem Skript.
- Versuchen Sie, eigene Beispiele zu finden.
- Wenn Sie Übungsaufgaben bearbeiten und Ihnen nicht direkt etwas einfällt, fragen Sie sich
  - Habe ich verstanden, was ich zeigen oder ausrechnen soll?
  - Wo ist eigentlich das Problem?
  - Wurden in der Vorlesung ähnliche Probleme behandelt?
  - Die Antworten auf welche Fragen (außer "Wie geht das?") würden weiterhelfen?
- Sprechen Sie über Mathematik! Fragen Sie Kommilitonen, Tutoren und Professoren.
- Man findet im Internet alles, aber durch Googeln hat noch nie jemand Mathematik gelernt.

# 1. Kapitel **Mathematische Sprache.**

## 1.1 Was ist Mathematik?

(a) "For Scholars and laymen alike it is not philosophy but active experience in mathematics itself that alone can answer the question: What is Mathematics?" (Courant und Robbins, 1940)
"Die Kinder müssten, um das Rechnen der Volksschule zu verstehen, bedeutende Philosophen sein, in Ermangelung dess brauchen sie Übung" (Wittgenstein)

Literaturhinweis: Timothy Gowers, Mathematics, A Very Short Introduction (CUP 2002)

(b) Wozu Mathematik?

- Beschreiben, erklären, prognostizieren, optimieren (wie jede Wissenschaft)
- Anspruch: Wahrheit (wie jede Wissenschaft??)
- Dafür spezielle Methode:
  - Abstrakte Begriffe und Fokus auf die Frage: "Wie funktionieren die Objekte?" (anstatt "Was sind die Objekte?")
  - Beweise!
- Ein Beweis ist die wiederholte Anwendung einfacher logischer Prinzipien wie dem Ersetzungsprinzip (Ist $A(x)$ eine wahre Aussage über $x$ und gilt $x = y$, so ist auch $A(y)$ wahr) oder dem modus ponens (Wenn $A$ die Aussage $B$ impliziert und $A$ wahr ist, so ist auch $B$ wahr.)
- *Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.*
- Das scheint so banal, dass man Zweifel erst wecken muss.

## 1.2 Missstände der Umgangssprache.

(a) *Vögel können fliegen. Pinguine sind Vögel. Also können Pinguine fliegen.*

- Da Pinguine offenbar nicht fliegen können, gibt es drei Möglichkeiten:
  - Pinguine halten sich nicht an die Logik
  - Pinguine sind keine Vögel
  - *Vögel können fliegen* ist falsch , logisch nicht belastbar
- Man darf also nur "logisch belastbare" Aussagen für die Mathematik zulassen.

(b) *"Der Bundespräsident wird ... von der Bundesversammlung gewählt."* (GG Art. 54 (1))

- Joachim Gauck ist Bundespräsident.
- Man kann Art. 54 (1) also auch formulieren *"Joachim Gauck wird ... von der Bundesversammlung gewählt"*.
- Das Ersetzungsprinzip gilt hier also nicht.

(c) Wir werden viele Begriffe (zum Beispiel: Stetige Funktionen) definieren. Selbst dabei gibt es Probleme:

- Die Grelling-Nelson-Antinomie:
  - Ein Adjektiv heißt autologisch, wenn es auf sich selbst zutrifft (z.B. *dreisilbig*), und es heißt heterologisch, wenn es nicht auf sich selbst zutrifft (z.B. einsilbig).
- Ist das Adjektiv *heterologisch* nun autologisch oder heterologisch?
- Gibt es das Adjektiv heterologisch? Bestimmte Artikel sind gefährlich!

(d) Die Russel-Antinomie:

- *Herr $B$ ist Barbier in einem Dorf und rasiert genau die Männer, die sich nicht selbst rasieren.*
- Wer rasiert Herrn $B$?
- So einen Barbier gibt es nicht und daran ist kein Widerspruch.
- In der Bibliothek kann man keinen Katalog erstellen, der genau die Kataloge auffürt, die sich nicht selbst aufführen.
- Vorsicht mit Katalogisierungsregeln!

## 1.3 Aussagenlogik.

(a) Wir benutzen die logischen Symbole
$=$ (gleich), $\wedge$ (und), $\vee$ (einschliessendes oder),$\neg$ (Negation), $\forall$ (für alle), $\exists$ (es gibt), $\rightarrow$ (Implikation), $\leftrightarrow$ (Äquivalenz)
in ihrer umgangssprachlichen Bedeutung.

- In der formalen Logik werden diese Symbole bedeutungsfrei benutzt, die Bedeutung ergibt sich implizit durch Verwendungsregeln, an die man sich hoffentlich während der Spracherwerbs gewöhnt hat.
- Das machen wir hier nicht explizit!

(b) Bemerkungen und Beispiele.

- Die materiale Implikation $A \rightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $A$ falsch oder $B$ wahr ist. Dies besagt nichts über die Wahrheit von $A$!
- Die Aussage *"Wenn Frau Merkel ein Gespenst ist, kann sie fliegen"* ist wahr!
- Wir schreiben $A \Rightarrow B$ und $A \Leftrightarrow B$ meistens für die inhaltliche Implikation beziehungsweise Äquivalenz, was soviel heißt wie: Wir haben gute Gründe, um aus der Wahrheit von $A$ auf die Wahrheit von $B$ zu schließen. Zum Beispiel:
- $\neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; (\neg A) \wedge (\neg B)$
- $\neg(A \rightarrow B) \;\Leftrightarrow\; A \wedge (\neg B)$
- $\neg(\forall x\, A(x)) \;\Leftrightarrow\; \exists x\, (\neg A(x))$
- $(1+1=2) \rightarrow \left( \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi} \right)$ ist wahr (weil die zweite Teilaussage wahr ist, wie wir im zweiten Semester lernen werden), aber hier schreiben wir nicht $\Rightarrow$.

- Oft benutzen wir komplizierte Aussagen wie (für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$)

$$\forall \varepsilon \in ]0, \infty[ \; \exists \delta \in ]0, \infty[ \; \forall y \in \mathbb{R} \text{ gilt } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

- Das könnte man auch verbalisieren, und wenn man das geschickt macht, kann das sehr nützlich sein (zum Beispiel, um sich so eine Monsterformel zu merken): Für jede positive Fehlerschranke (das $\varepsilon$) gibt es eine Toleranz (das $\delta$), so dass für jedes Agument (das $y$), dessen Abstand ($|x - y|$) die Toleranz einhält, der Abstand zwischen den Funktionswerten ($|f(x) - f(y)|$) die Fehlerschranke nicht übersteigt.
- Formal kommen $\varepsilon, \delta$, und $y$ in der Aussage als gebundene Variablen vor – also inhaltlich gar nicht. Obige Aussage ist äquivalent zu

$$\forall \sharp \in ]0, \infty[ \; \exists \heartsuit \in ]0, \infty[ \; \forall \blacklozenge \in \mathbb{R} \text{ gilt } |x - \blacklozenge| < \heartsuit \Rightarrow |f(x) - f(\blacklozenge)| < \sharp$$

  Natürlich benutzt man suggestive Bezeichnungen für Variablen und sonstige Objekte, aber das ist logisch nicht zwingend (und manchmal sogar irreführend).
- Eine sehr gute Übung: Formulieren Sie die Negation obiger Aussage sowohl mit Hilfe der logischen Symbole als auch verbal!

## 1.4 Beweise.

- Ein Beweis soll zeigen, dass und wie eine Konklusion aus den Prämissen folgt.
- Er soll den Leser oder Zuhörer davon auf redliche Weise überzeugen (Beispiele reichen nicht, keine Überredung, Drohung, Bestechung, Berufung auf Autoritäten,...).
- Wie überzeugend ein Beweis ist, hängt auch von den Kenntnissen des Lesers oder Hörers ab. Bei geübten Lesern macht man größere Folgerungsschritte als jetzt am Anfang. Im Prinzip muss man in der Lage sein, jeden Schritt in so kleine Schrittchen zu unterteilen, dass ein zum Verständnis gewilltes Gegenüber am Ende alle Teilschritte versteht.
- In dieser Vorlesung benutzen wir die logischen Symbole nur gelegentlich. Stattdessen benutzen wir Formulierungen wie
  - wegen Satz *ab* gilt ...
  - *xy* gilt, weil ...
  - aus der Voraussetzung folgt induktiv, dass ... und wegen des *ab*-Kriteiums ist daher ...
- Wie ein Beweis funktioniert, sieht man besser an Beispielen. Dafür, wie man selbst Beweise findet, gibt es leider keine einfachen Rezepte. Viele Beweise sind kunstvoll und genial, und für viele wichtigen Vermutungen sind noch gar keine Beweise gefunden!