J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
06.01.2010

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, 13.01.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1

Zeigen Sie für $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergieren aber das Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ divergiert.

Aufgabe 2

Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ erweitern wir die Definition der Binomialkoeffizienten durch $\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n!}\prod\limits_{j=0}^{n-1}(\alpha - j)$.

Berechnen Sie den Konvergenzradius $R(\alpha)$ der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n} z^n$ sowie den Wert der Reihe für $\alpha \in \{-1, -2, -3\}$ und alle $|z| < R(\alpha)$.
Hinweis: Benutzen Sie für $\alpha \in \{-2, -3\}$ zur Berechnung das Cauchy-Produkt.

Aufgabe 3

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n} z^n$ beziehungsweise $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{\sqrt{n}}$?

Aufgabe 4

(a) Für $n, k \in \mathbb{N}$ seien $a_{n,k} \in \mathbb{R}_+$ mit $c = \sup\left\{\sum\limits_{n=1}^{N}\sum\limits_{k=1}^{K} a_{n,k} : N, K \in \mathbb{N}\right\} < \infty$.

Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Konvergenz der Reihen $A_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n,k}$ und dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n = c$. Folgern Sie daraus diese einfache Version des Doppelreihensatzes:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}.$$

(b) Zeigen Sie für die Zeta-Funktion ζ die Beziehung $\sum\limits_{p=2}^{\infty}(\zeta(p) - 1) = 1$.

Aufgabe 5

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a(n)$ die Anzahl der Ziffern der Binärdarstellung von n, also gemäß Blatt 6, Aufgabe 5 die kleinste Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass es Koeffizienten $z_0, ..., z_{m-1} \in \{0, 1\}$ gibt mit $z_{m-1} \neq 0$ und $n = \sum\limits_{k=0}^{m-1} z_k 2^k$.

Untersuchen Sie für $p > 0$ die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n \cdot (a(n))^p}$ auf Konvergenz.