J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
09.12.2009

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 7
Abgabe: Mittwoch, 16.12.2009, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Sei $x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ eine gegen x_∞ konvergente Folge. Zeigen Sie die drei folgenden Aussagen.

(i) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $|x_n| \le c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auch $|x_\infty| \le c$.

(ii) Die Folge der Beträge $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $|x_\infty|$.

(iii) Die Folge der Wurzeln $(\sqrt{|x_n|})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\sqrt{|x_\infty|}$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie die Konvergenz oder die Divergenz der Folgen

(i) $a_n = \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})^2}$,

(ii) $b_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

(iii) $c_n = n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

(iv) $d_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \delta_j$ für eine Folge $\delta \in [0,1]^{\mathbb{N}}$,

(v) $e_{n+1} = (e_n)^2 + \dfrac{1}{4}$ für $e_1 \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Aufgabe 3
Seien $a, b \ge 0$, zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a,b\}$.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass die durch $x_n = \sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)$ definierte Folge x gegen 0 konvergiert.
Hinweis 4.4.(b)

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die durch $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ und $b_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ definierten Folgen gegen den selben Grenzwert konvergieren. Schliesssen Sie für den Grenzwert e beider Folgen, dass $2 < e < 3$ gilt.
Hinweis Beweisen Sie, dass $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ indem Sie die Quotienten $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ und $\dfrac{b_n}{b_{n+1}}$ mittels der Bernoulli-Ungleichung abschätzen.