J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
02.12.2009

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 6
Abgabe: Mittwoch, 09.12.2009, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Sei $w = u + iv$ eine komplexe Zahl mit $u, v \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$a = \left(\frac{|w| + u}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } b = \left(\frac{|w| - u}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

sowie $z = a + ib$. Beweisen Sie dass $z^2 = w$, falls $v \geq 0$ und $\overline{z}^2 = w$, falls $v \leq 0$. Schliessen Sie daraus, dass jede komplexe Zahl $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau zwei Wurzeln hat.
Hinweis Um zu zeigen, dass es höchstens zwei Wurzeln gibt, dürfen Sie die Aufgabe 3 aus Blatt 5 auch für Polynome $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ benutzen.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Lösungen der Gleichung $z^3 - 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ ein gleichseitiges Dreieck bilden.
Hinweis Klammern Sie $z - 1$ aus.

Aufgabe 3
Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die untere Dreiecksungleichung

$$||z| - |w|| \leq |z - w|$$

sowie die Parallelogrammgleichung

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

Aufgabe 4
Für $q = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $y \geq 0$ definieren wir $y^q = \sqrt[m]{y^n}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\rho : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, q \mapsto y^q$ wohldefiniert ist. Beweisen Sie außerdem die drei Rechenregeln $y^{p+q} = y^p y^q$, $y^{pq} = (y^p)^q$ sowie $y^q z^q = (yz)^q$ für $y, z \geq 0$ und $p, q \in \mathbb{Q}$.
Hinweis Benutzen Sie die Injektivität auf $[0, \infty[$ der Funktion $z \mapsto z^k$ für geeignete $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5
Sei $b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ beweisen Sie, dass jede natürliche Zahl eine eindeutige b-adische Entwicklung besitzt, das heißt für alle $z \in \mathbb{N}$ existieren ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}_0$ und eindeutig bestimmte Koeffizienten $z_0, ..., z_m \in \{0, ..., b-1\}$ mit $z_m \neq 0$ und $z = \sum_{k=0}^{m} z_k b^k$.
Im Hexadezimalsystem ist $b = 16$ und man benutzt außer den Ziffern $0, ..., 9$ die Symbole A, B, C, D, E, F für die Zahlen 10 bis 15. Wie lautet die hexadezimalzahl AFFE im Dezimalsystem? Untermauern Sie Ihre Behauptung mit einer Rechnung.
Hinweis Induktion. Zeigen Sie für die Eindeutigkeit, dass $z_m < x_m$ bereits $z < x$ impliziert.