J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
25.11.2009

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, 02.12.2009, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass $A \subseteq \mathbb{R}$ genau dann nach oben beschänkt ist, wenn die Menge $-A = \{-x : x \in A\}$ nach unten beschränkt ist. Beweisen Sie in diesem Fall die Gleichheit $\inf(-A) = -\sup A$.

Aufgabe 2
Sei $(X, \preceq)$ eine geordnete Menge. Wir definieren die lexikographische Ordnung $\trianglelefteq$ auf $X \times X$ durch $(v, w) \trianglelefteq (x, y)$ falls $v \prec x$ oder ($v = x$ und $w \preceq y$).

(i) Beweisen Sie, dass $\trianglelefteq$ eine (Total-)Ordnung auf $X \times X$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < 0\}$ in $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \trianglelefteq)$ eine nach oben beschränkte Menge ist, die kein Supremum besitzt.

(iii) Skizzieren Sie im Fall $(X, \preceq) = (\mathbb{R}, \leq)$ das „Intervall“

$$](1, 0), (2, 1)[= \{(a, b) \in X \times X : (1, 0) \triangleleft (a, b) \triangleleft (2, 1)\}.$$

Aufgabe 3
Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit reellen Koeffizienten a_k heißt Polynom (vom Grad $\leq n$). Beweisen Sie mit Hilfe des Binomialsatzes, dass jedes Polynom f vom Grad $\leq n$ auch um $c \in \mathbb{R}$ umentwickelt werden kann, das heißt es existieren Koeffizienten $b_k \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - c)^k$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie außerdem, dass für ein Polynom f vom Grad $\leq n$ mit $n + 1$ verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_{n+1}$ (d.h. $f(\lambda_j) = 0$) bereits $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten muss.
Hinweis Induktion und Entwicklung um eine Nullstelle

Aufgabe 4
Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt algebraisch, falls $p(x) = 0$ für ein Polynom p mit rationalen Koeffizienten die nicht alle null sind. Alle nicht-algebraischen Zahlen werden transzendent genannt. Beweisen Sie, dass es transzendente Zahlen gibt.
Hinweis Zeigen Sie, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist, und nutzen Sie aus, dass dies für $\mathbb{R}$ nicht gilt.

Aufgabe 5
Seien $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge, sowie $A_i \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt für alle $i \in I$. Zeigen Sie

$$\sup\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sup\{\sup A_i : i \in I\} \quad \text{und} \quad \sup\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \leq \inf\{\sup A_i : i \in I\}.$$

Beachten Sie die Konventionen $\sup A = +\infty$, falls A nicht nach oben beschränkt ist und $\inf A = -\infty$, falls A nicht nach unten beschränkt ist, sowie $\sup \emptyset = -\infty$. Begründen Sie mit einem Gegenbeispiel, wieso die Gleichheit beim Schnitt im Allgemeinen falsch wäre.