J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
18.11.2009

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 4
Abgabe: Mittwoch, 25.11.2009, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Zeigen Sie für alle $n, m \in \mathbb{N}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1}$ und (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k+m-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$.

Berechnen Sie außerdem (mit Hilfe von (ii)) die Summen $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ und $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} \binom{n}{\ell}\binom{m}{k-\ell} = \binom{n+m}{k}$.
Hinweis Beweisen Sie zuerst die folgende Formel:

$$|\mathscr{P}_k(\{1, ..., n+m\})| = |\bigcup_{\ell=0}^{k} \mathscr{P}_\ell(\{1, ..., n\}) \times \mathscr{P}_{k-\ell}(\{n+1, ..., n+m\})|.$$

Aufgabe 3
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k_1, ..., k_r \in \mathbb{N}_0$ mit $\sum_{j=1}^{r} k_j = n$. Beweisen Sie (durch Induktion nach n), dass die Menge

$$A = \{f : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., r\} : |f^{-1}(\{\ell\})| = k_\ell \text{ für } \ell = 1, ..., r\}$$

die Kardinalität $|A| = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!}$ hat. Interpretieren Sie A als Anzahl gewisser Möglichkeiten n Personen auf r Klassen aufzuteilen.

Aufgabe 4
Das Hotel Hilbert verfügt über unendlich viele durchnummerierte Zimmer. Wegen einer Mathematikkonferenz sind alle Zimmer belegt. Am frühen Abend kommt ein unerwarteter Gast zur Tagung. Wie schafft es der Concierge den neuen Gast und sämtliche Mathematiker in ein eigenes Zimmer unterzubringen? Mitten in der Nacht trifft ein Reisebus mit unendlich vielen Physikern ein, die sich spontan entschlossen haben, an der Mathematikkonferenz teilzunehmen. Auch diese vermag der Concierge in Einzelzimmer unterzubringen, jedoch nicht ohne sehr viele Mathematiker aufzuwecken. Wie könnte er vorgehen?

Aufgabe 5
Seien M eine endliche Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M, sodass alle Äquivalenzklassen die gleiche Kardinalität k haben. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es? Wieviele solche Äquivalenzrelationen kann es auf der Menge $M = \{1, ..., p\}$ geben, wenn p eine Primzahl ist? Gibt es eine Äquivalenzrelation auf $\{k \in \mathbb{N} : k \leq 78\}$, bei der alle Äquivalenzklassen genau sieben Elemente haben?