

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, 18.11.2009, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1

Seien A, B zwei endliche Mengen. Zeigen Sie $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
Wie sieht die Formel zur Berechnung von $|A \cup B \cup C|$ für drei endliche Mengen A, B, C aus.

Hinweis In Fachbüchern findet man unter dem Stichwort „Siebformel“ eine Verallgemeinerung für eine endliche Vereinigung endlicher Mengen.

Aufgabe 2

- (i) Zeigen Sie, dass die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich n^2 ist.
- (ii) Seien $q \geq -1$ eine rationale und n eine natürliche Zahl. Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung $(1 + q)^n \geq 1 + nq$.

Hinweis Induktion

Aufgabe 3

Seien N, M zwei endliche Mengen mit $|N| = n$ und $|M| = m$. Berechnen Sie die Kardinalitäten der Mengen $\{f \in M^N : f \text{ injektiv}\}$ und $\{f \in M^N : f \text{ bijektiv}\}$.

Aufgabe 4

- (i) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P}_e(\mathbb{N}) = \{M \subseteq \mathbb{N} : M \text{ endlich}\}$ aller endlichen Teilmengen von \mathbb{N} abzählbar ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) = \{M \subseteq \mathbb{N} : M \text{ unendlich}\}$ aller unendlichen Teilmengen von \mathbb{N} nicht abzählbar ist.

Hinweis Nutzen Sie für (ii) die Bemerkung 2.13.(g).

Aufgabe 5

Seien $T \in \mathcal{P}_6(\{1, \dots, 49\})$ ein Tipp beim Lotto „6 aus 49“ und $k \leq 6$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{|\{A \in \mathcal{P}_6(\{1, \dots, 49\}) : |A \cap T| = k\}|}{|\mathcal{P}_6(\{1, \dots, 49\})|},$$

bei einer Ziehung genau k richtige Zahlen zu haben.