

**Einführung in die Mathematik**  
**Übungsblatt 3**

Abgabe: Mittwoch, 18.11.2009, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

---

**Aufgabe 1**

Seien  $A, B$  zwei endliche Mengen. Zeigen Sie  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ .  
Wie sieht die Formel zur Berechnung von  $|A \cup B \cup C|$  für drei endliche Mengen  $A, B, C$  aus.

**Hinweis** In Fachbüchern findet man unter dem Stichwort „Siebformel“ eine Verallgemeinerung für eine endliche Vereinigung endlicher Mengen.

**Aufgabe 2**

- (i) Zeigen Sie, dass die Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen gleich  $n^2$  ist.
- (ii) Seien  $q \geq -1$  eine rationale und  $n$  eine natürliche Zahl. Beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung  $(1 + q)^n \geq 1 + nq$ .

**Hinweis** Induktion

**Aufgabe 3**

Seien  $N, M$  zwei endliche Mengen mit  $|N| = n$  und  $|M| = m$ . Berechnen Sie die Kardinalitäten der Mengen  $\{f \in M^N : f \text{ injektiv}\}$  und  $\{f \in M^N : f \text{ bijektiv}\}$ .

**Aufgabe 4**

- (i) Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathcal{P}_e(\mathbb{N}) = \{M \subseteq \mathbb{N} : M \text{ endlich}\}$  aller endlichen Teilmengen von  $\mathbb{N}$  abzählbar ist.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Menge  $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) = \{M \subseteq \mathbb{N} : M \text{ unendlich}\}$  aller unendlichen Teilmengen von  $\mathbb{N}$  nicht abzählbar ist.

**Hinweis** Nutzen Sie für (ii) die Bemerkung 2.13.(g).

**Aufgabe 5**

Seien  $T \in \mathcal{P}_6(\{1, \dots, 49\})$  ein Tipp beim Lotto „6 aus 49“ und  $k \leq 6$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{|\{A \in \mathcal{P}_6(\{1, \dots, 49\}) : |A \cap T| = k\}|}{|\mathcal{P}_6(\{1, \dots, 49\})|},$$

bei einer Ziehung genau  $k$  richtige Zahlen zu haben.