J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
04.11.2009

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 2

Abgabe: Mittwoch, 11.11.2009, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $g \circ f$ von zwei injektiven (bzw. surjektiven) Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ wieder injektiv (bzw. surjektiv) ist.

Aufgabe 2
Beweisen Sie für jede Abbildung $f : X \to Y$ und alle Teilmengen A, B von Y

$$f^{-1}(A * B) = f^{-1}(A) * f^{-1}(B)$$

für alle Mengenoperationen $* \in \{\cap, \cup, \setminus\}$.
Zeigen Sie zusätzlich $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$ und $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$ für zwei Mengen $C, D \subseteq X$.

Aufgabe 3
Seien X eine nicht-leere Menge und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Funktion f ist injektiv,

(ii) es existiert eine Funktion $j : Y \to X$, sodass $j \circ f = id$, wobei $id : X \to X$ die Identität $id(x) = x$ ist,

(iii) für alle Mengen Z und Funktionen $g, h : Z \to X$ folgt aus $f \circ g = f \circ h$ bereits $g = h$,

(iv) für alle $A, B \subseteq X$ gilt $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

Hinweis: Um Papier und Arbeit zu sparen, sollten Sie die als „Ringschluss“ bekannte Beweistechnik (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) anwenden. Betrachten Sie für die Implikation (iii) $\Rightarrow$ (iv) geeignete konstante Abbildungen g und h. Wenden Sie (iv) auf einelementige Mengen an, um daraus (i) zu folgern.

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass $4^{2009} - 1$ durch 3 teilbar ist.

Aufgabe 5
Sei X eine Menge. Für $A \subseteq X$ definieren wir die Abbildung $I_A : X \to \{0, 1\}$ durch $I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$.
Zeigen Sie, dass die durch $\chi(A) = I_A$ definierte Abbildung $\chi : \mathcal{P}(X) \to \{0, 1\}^X$ eine Bijektion ist, wobei wie besprochen $\{0, 1\}^X$ die Menge aller Abbildungen von X in die zweielementige Menge $\{0, 1\}$ bezeichnet.