J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
03.02.2010

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 13
Abgabe: Mittwoch, 10.02.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Berechnen Sie den Abschluss sowie den offenen Kern der folgenden Mengen:

(i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ oder } y \in \mathbb{Q}\}$,

(ii) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2\}$.

Aufgabe 2
Seien $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, wobei dieser mit dem euklidischen Abstand versehen ist. Wir definieren $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen

(a) Ist A offen, so ist auch $A + B$ offen.

(b) Sind A abgeschlossen und B kompakt, so ist auch $A + B$ abgeschlossen.

(c) Für $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \geq 1/x\}$ und $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-x, y) \in A\}$ sind A und B abgeschlossen, aber $A + B$ ist es nicht.

Aufgabe 3
Für $x \in \mathbb{R}$ sei $L_n(x)$ die Länge des Polygonzugs, der die Zahlen $e^{ix\frac{k}{n}}$ für $k = 0, ..., n$ verbindet, also

$$L_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left| e^{ix\frac{k}{n}} - e^{ix\frac{k-1}{n}} \right|.$$

Zeigen Sie $L_n(x) = 2n \left| \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \right|$ und $\lim_{n\to\infty} L_n(x) = x$. Was bedeutet der zweite Teil dieser Aussage geometrisch?
Hinweis: Beweisen Sie die Stetigkeit der durch $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x \neq 0$ und $f(0) = 1$ gegebenen Funktion.

Aufgabe 4
Sei $f : [0, 2\pi[\to S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ definiert durch $f(x) = \exp(ix)$. Zeigen Sie, dass f bijektiv und stetig ist. Ist die Umkehrabbildung ebenfalls stetig? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 5
Seien (X, d) ein metrischer Raum sowie $A \subseteq X$. Wir definieren die Relation $x \overset{A}{\sim} y$, falls es eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \to A$ gibt mit $\varphi(0) = x, \varphi(1) = y$. Gilt $x \overset{A}{\sim} y$ für alle $x, y \in A$, so heißt A wegweise zusammenhängend. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Die Relation $\overset{A}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

(b) Sind A, B wegweise zusammenhängend mit $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ wegweise zusammenhängend.

(c) Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ ist die Kugel $B_{d_p}(x, r) = \{y \in \mathbb{C}^n : d_p(x, y) < r\}$ in $(\mathbb{C}^n, d_p)$ wegweise zusammenhängend.

(d) Sind A wegweise zusammenhängend und $f : A \to Y$ stetig, so ist auch $f(A)$ wegweise zusammenhängend.

Hinweis: Für die Transitivität „verbinde“ man zwei Wege etwa durch $\gamma(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & : t \leq 1/2 \\ \psi(2t-1) & : t > 1/2 \end{cases}$.

Bonusaufgabe
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es gibt eine stetige Bijektion $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$.

(b) Es gibt eine Bijektion $g : [0, 1[\to]0, 1[$.

(c) Es gibt keine stetige Bijektion $g : [0, 1[\to]0, 1[$

Hinweis: Für (b), betrachten Sie die Abbildung $g(x) = \begin{cases} x & : 0 \neq x \neq \frac{1}{n} \text{ für alle } n \geq 2 \\ \frac{1}{n+1} & : x = \frac{1}{n} (n \geq 2) \\ \frac{1}{2} & : x = 0 \end{cases}$.