J. Wengenroth
N. Kenessey

WS 2009/10
20.01.2010

Einführung in die Mathematik
Übungsblatt 11
Abgabe: Mittwoch, 27.01.2010, 10.00 Uhr, Übungskasten 5

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : [a, b] \to [a, b]$ einen Fixpunkt besitzt, also einen Punkt $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x$.

(b) Sei $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein Polynom vom Grad p mit reellen Koeffizienten, also eine Abbildung der Form $P(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$ mit $a_p \neq 0$ und $a_0, ..., a_p \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass P eine reelle Nullstelle besitzt, falls der Grad p ungerade ist oder, falls p gerade ist mit $\frac{a_0}{a_p} \leq 0$.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie mit Beweis die Werte $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Aufgabe 3

(a) Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ mit $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ sowie $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \exp(x_k).$$

(Den Fall $n = 2$ haben wir in 5.9.(f) gezeigt)

(b) Zeigen Sie für positive $x_1, ..., x_n$ die folgende Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\left(x_1 + ... + x_n\right).$$

Aufgabe 4
Untersuchen Sie für $p \in \mathbb{C}$ die Konvergenz der durch $x_n = n^p \log(n)$ definierten Folge. Für welche reellen Werte von p konvergiert die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \log(n)}$? Begründen Sie Ihr Ergebnis.
Hinweis: Verdichtungskriterium.

Aufgabe 5
Für $x \in \mathbb{C}^N$ und $r \geq 1$ sei $\|x\|_r$ so definiert, wie in 5.9.(g) sowie $\|x\|_\infty = \max\{|x_j| : 1 \leq j \leq N\}$. Zeigen Sie, für $1 \leq r \leq s \leq \infty$ die Abschätzungen

$$\|x\|_s \leq \|x\|_r \leq N^{1/r-1/s}\|x\|_s.$$

Folgern Sie daraus, dass für $1 \leq r, s \leq \infty$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann bezüglich d_r gegen x konvergiert, wenn sie auch bezüglich d_s gegen x konvergiert.
Hinweis:
Es reicht die erste Ungleichung für $\|x\|_r \leq 1$ zu zeigen. Für die zweite Ungleichung wende man für den Fall $s < \infty$ die Hölder-Ungleichung mit $q = \frac{s}{r}$ an.