J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
25.06.2013

Topologie
Übungsblatt 9

Abgabe: Dienstag, 02. Juli 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

Aufgabe 34
Sei $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{C}_*$ heißt exponentiell, falls es ein stetiges $g : X \to \mathbb{C}$ gibt mit $f = \exp \circ g$. Zeigen Sie folgende Aussagen (wobei die n-te jeweils beim Beweis der $(n + 1)$-ten nützlich ist).

(1) Produkte und Quotienten exponentieller Funktionen sind exponentiell, und jedes stetige f mit Werten in $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ ist exponentiell. (Benutzen Sie, dass die Polarkoordinatenabbildung $]-\pi, \pi[\times]0, \infty[\to \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, $(\alpha, r) \mapsto re^{i\alpha}$ eine stetige Inverse besitzt.)

(2) Sind $g, h : X \to \mathbb{C}_*$ stetig mit $|g(x) - h(x)| < |g(x)| + |h(x)|$ für alle $x \in X$, so ist $f = h/g$ exponentiell.

(3) Sind X ein kompakter metrischer Raum und $f, g \in C(X, \mathbb{C}_*)$ homotop, so ist g/f exponentiell.

(Tipp: Für eine Homotopie $F : X\times I \to \mathbb{C}_*$ ist $\varepsilon = \inf\{|F(x, t)| : x \in X, t \in I\} > 0$, und wegen der gleichmäßigen Stetigkeit gibt es $0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$ mit
$$|F(x, t_k) - F(x, t_{k-1})| < \varepsilon \leq |F(x, t_{k-1})| \text{ für alle } x \in X.)$$

(4) Die Inklusion $f : S^1 \to \mathbb{C}_*$, $z \mapsto z$ ist nicht exponentiell. (Tipp: Falls $f = \exp \circ g$, ist $\exp(g(e^{it}) - it)$ konstant $= 1$, so dass $t \mapsto g(e^{it}) - it$ Werte in $\{2\pi in : n \in \mathbb{Z}\}$ annimmt und daher konstant ist.)

(5) $\pi_1(\mathbb{C}_*, 1)$ ist nicht trivial. (Das könnte man natürlich aus der Homotopieäquivalenz von $\mathbb{C}_*$ und S^1 folgern, aber das soll man hier nicht benutzen.)

Aufgabe 35
Seien X, Y zwei topologische Räume und $(x_0, y_0) \in X \times Y$. Zeigen Sie, dass $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ isomorph zur Gruppe $\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ ist (wobei für zwei Gruppen G und H das kartisische Produkt $G \times H$ mit der argumentweisen Verknüpfung $(g, h) \cdot (\gamma, \eta) = (g \cdot \gamma, h \cdot \eta)$ versehen wird).

Aufgabe 36
Bestimmen Sie die Fundamentalgruppen eines Vollzylinders $B^2 \times I$, dessen Rand, eines Zylinders $S^1 \times I$, des Volltorus $B^2 \times S^1$ sowie dessen Rand jeweils bezüglich eines beliebigen Basispunkts.

Aufgabe 37
Zeigen Sie für alle $n \neq 2$, dass $\mathbb{R}^n$ nicht homöomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.
(Tipp: S^{n-1} ist ein Defermationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.)