J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
18.06.2013

Topologie
Übungsblatt 8
Abgabe: Dienstag, 25. Juni 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

Aufgabe 30
Zeigen Sie für einen topologischen Raum X die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) Jedes stetige $f : S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

(2) Für jedes stetige $f : S^1 \to X$ gibt es ein stetiges $\Phi : B^2 \to X$ mit $\Phi|_{S^1} = f$.

Tipp. Für eine Homotopie F zwischen f und einer konstanten Abbildung mit Wert c zeige man die Stetigkeit von

$$\Phi(x) = \begin{cases} F\Big(\frac{1}{\|x\|}x, \|x\|\Big) & , \quad x \neq 0 \\ c & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 31
Seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum, $x_0, x_1 \in X$ und $D(f, g) = \sup\{d(f(s), g(s)) : s \in I\}$ für

$$f, g \in C_{x_0,x_1}(I, X) = \{f : I \to X \text{ stetig }, f(0) = x_0, f(1) = x_1\}.$$

Zeigen Sie, dass zwei Kurven $f, g \in C_{x_0,x_1}$ genau dann homotop (mit festen Endpunkten) sind, wenn es in $C_{x_0,x_1}(I, X)$ eine stetige Kurve von f nach g gibt.

Aufgabe 32
Seien A, B offene Teilmengen eines wegzusammenhängenden topologischen Raums X mit $A \cup B = X$, so dass $A \cap B$ wegzusammenhängend ist.
Zeigen Sie, dass X einfach zusammenhängend ist (d.h. jedes stetige $f : S^1 \to X$ ist homotop zu einer konstanten Abbildung), falls A und B einfach zusammenhängend sind.

Aufgabe 33
Ein topologischer Raum heißt kontrahierbar mit festgehaltenem $x_0 \in X$, wenn es ein stetiges $F : X \times I \to X$ gibt, so dass $F(x, 0) = x, F(x, 1) = x_0$ und $F(x_0, t) = x_0$ für alle $x \in X$ und $t \in I$.

(a) Zeigen Sie in so einem Raum, dass jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ zu einer konstanten Abbildung homotop ist.

(b) Sei $X = I\times\{0\}\cup\{0\}\times I\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{1/n\}\times I$ (versehen mit der Relativtopologie von $\mathbb{R}^2$). Zeigen Sie, dass X kontrahierbar mit festgehaltenem $(0,0)$ ist aber nicht kontrahierbar mit festgehaltenem $(0,1)$.