J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
11.06.2013

Topologie
Übungsblatt 7
Abgabe: Dienstag, 18. Juni 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

Aufgabe 26
Seien M eine Menge und $G \subseteq M \times M$. Zeigen Sie, dass

$$R(M) = \bigcup \{R \subseteq M \times M \text{ Äquivalenzrelation mit } G \subseteq R\}$$

eine Äquivalenzrelation ist, und dass

$$\begin{aligned} R(M) =& \{(x,y) \in M \times M : \exists n \in \mathbb{N}_0, x_0, \ldots, x_n \in M \text{ mit } x = x_0, x_n = y \\ & \text{und } (x_k, x_{k+1}) \in G \cup G^{-1} \text{ für alle } 0 \leq k < n\}, \end{aligned}$$

wobei $G^{-1} = \{(y,x) \in M \times M : (x,y) \in G\}$.
Was ist $R(G)$ für $G = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ mit einer Funktion $f : A \to M$ für $A \subseteq M$?

Aufgabe 27
Bestimmen Sie für drei topologische Räume X, Y, Z eine möglichst einfache Bijektion

$$I : C(X \sqcup Y, Z) \longrightarrow C(X,Z) \times C(Y,Z),$$

wobei $C(X,Z)$ die Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Z bezeichnet.

Aufgabe 28
Seien X, Y zwei zusammenhängende topologische Räume, so dass $X \sqcup X$ und $Y \sqcup Y$ homöomorph sind. Zeigen Sie, dass X und Y homöomorph sind.
Finden Sie einen topologischen Raum $X \neq \emptyset$, so dass X homöomorph zu $X \sqcup X$ ist.

Aufgabe 29
Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ und $\sim$ die von $\{(x_0, y_0)\}$ erzeugte Äquivalenzrelation in $X \sqcup Y$ sowie $X \vee Y = (X \sqcup Y)/_\sim$. Zeigen Sie, dass $X \vee Y$ Hausdorff bzw. kompakt bzw. zusammenhängend ist, wenn X und Y beide diese Eigenschaft haben.
Erhält man für wegzusammenhängende Räume X und Y bei einer anderen Wahl der „Basispunkte“ einen zu $X \vee Y$ homöomorphen Raum?