J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
28.05.2013

Topologie
Übungsblatt 6

Abgabe: Dienstag, 11. Juni 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

In der Woche vom 3. bis zum 7. Juni fallen die Vorlesungen und die Übung aus.

Aufgabe 21

Eine topologische Gruppe $(G, \mathscr{T})$ besteht aus einer Gruppe G und einer Topologie $\mathscr{T}$ auf G, so dass die Gruppenverknüpfung $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ und die Inversion $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$ stetig sind (wobei $G \times G$ mit der Produkttopologie versehen wird).

(a) Zeigen Sie, dass $(G, \mathscr{T})$ genau dann Hausdorff ist, wenn alle endlichen Teilmengen abgeschlossen sind.

(b) Ist $H \subseteq G$ ein Normalteiler, d. h. eine Untergruppe mit $x \cdot H = H \cdot x$ für alle $x \in G$, so gilt für die durch $x \sim y \iff y^{-1} \cdot x \in G$ definierte Äquivalenzrelation, dass $G/\sim$ genau dann Hausdorff ist, wenn H in G abgeschlossen ist.

Tipp zu (a): Für $x \neq y$ ist das neutrale Element $e \notin \{y^{-1} \cdot x\}$, so dass es $U \in \mathscr{U}_e(G, \mathscr{T})$ mit $y^{-1} \cdot x \notin U$ gibt. Man finde $V \in \mathscr{U}_e(G, \mathscr{T})$ mit $V \cdot V^{-1} \subseteq U$ und bastele daraus disjunkte Umgebungen von x beziehungsweise y.

Aufgabe 22

Für ein Element $x \in G$ einer Gruppe heißen $F(x) = \{x^n : n \in \mathbb{N}\}$ und $O(x) = \{x^m : m \in \mathbb{Z}\}$ *Vorwärts-* bzw. *voller Orbit* von x (wobei $x^0 = e$, $x^n = x \cdots x$ für $n \in \mathbb{N}$ und x^{-n} das inverse Element von x^n sind). Ist $(G, \mathscr{T})$ eine kompakte topologische Gruppe, so zeige man

$$O(x) \subseteq \overline{F(x)} \text{ für jedes } x \in G.$$

Tipp: Es reicht $x^{-1} \in \overline{F(x)}$ zu zeigen. Für $U \in \mathscr{U}_{x^{-1}}(G, \mathscr{T})$ finde man $V \in \mathscr{U}_e(G, \mathscr{T})$ mit $x \cdot V \cdot V^{-1} \subseteq U$ und überdecke $\overline{F(x)}$ durch endlich viele $x^n \cdot V$.

Aufgabe 23

Sei $(X, \mathscr{T})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, d. h. jede Umgebung U eines Punktes $x \in X$ enthält eine kompakte Umgebung $V \in \mathscr{U}_x(X, \mathscr{T})$.
Seien ∞ ein Symbol mit $\infty \notin X$ und $X_\infty = X \cup \{\infty\}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathscr{T}_\infty = \mathscr{T} \cup \{X_\infty \setminus K : K \subseteq X \text{ kompakt}\}$$

eine Topologie auf X_∞ ist, so dass $(X_\infty, \mathscr{T}_\infty)$ kompakt ist mit $\mathscr{T}_\infty|_X = \mathscr{T}$. Außerdem ist $\overline{X}^{\mathscr{T}_\infty} = X_\infty$, falls X nicht kompakt ist.

Aufgabe 24

(a) Finden Sie eine unstetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Graph $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ in $\mathbb{R}^2$ abgeschlossen ist.

(b) Seien $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum, (K, S) ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to K$ eine Abbildung, deren Graph $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ in $(X \times Y, \mathscr{T} \times S)$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Tipp: Andernfalls gibt es $x \in X$ und $U \in \mathscr{U}_{f(x)}(K, S)$, so dass $f^{-1}(U) \notin \mathscr{U}_x(X, \mathscr{T})$. Dann ist $\{M \subseteq K : \exists\, V \in \mathscr{U}_x(X, \mathscr{T}) \text{ mit } f(V) \cap U^c \subseteq M\}$ ein Filter in K. Untersuchen Sie feinere Ultrafilter.

Aufgabe 25 (20 Sonderpunkte und eine Flasche Sekt für die erste korrekte Lösung.)
Seien e die „Eisenbahnmetrik“ aus Aufgabe 2, also

$$e(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|, & \exists\, \lambda \geq 0 \text{ mit } x = \lambda y \\ \|x\| + \|y\|, & \text{sonst} \end{cases},$$

und $\mathscr{E}$ die erzeugte Topologie. Charakterisieren Sie die $\mathscr{E}$-kompakten Mengen allein durch Begriffe der euklidischen Topologie und Geometrie.

Um Prioritätsstreitigkeiten zu vermeiden, sind Lösungen entweder im Sekretariat E204 abzugeben oder per Email an `wengenroth@uni-trier.de` zu schicken.