J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
14.05.2013

Topologie
Übungsblatt 5
Abgabe: Dienstag, 28. Mai 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

Aufgabe 17
Zeigen Sie für einen topologischen Raum $(X, \mathscr{T})$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(1) $(X, \mathscr{T})$ ist Hausdorff.

(2) Die Diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ ist bezüglich der Produkttopologie auf $X \times X$ abgeschlossen.

(3) Für jede stetige Abbildung $f : (Y, \mathscr{S}) \to (X, \mathscr{T})$ von einem topologischen Raum $(Y, \mathscr{S})$ nach $(X, \mathscr{T})$ ist der Graph $G(f) = \{(y, f(y)) : y \in Y\}$ bezüglich der Produkttopologie auf $Y \times X$ abgeschlossen.

Aufgabe 18
Sei $\mathscr{T} = \{]-\infty, a[\,: a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass eine nicht-leere Menge $K \subseteq \mathbb{R}$ genau dann $\mathscr{T}$-kompakt ist, wenn $\sup(K) \in K$ gilt.

(b) Finden Sie zwei kompakte Teilmengen von $(\mathbb{R}, \mathscr{T})$, deren Durchschnitt nicht kompakt ist.

Aufgabe 19
Zeigen Sie, dass jede kompakte Teilmenge eines halbmetrischen Raums eine abzählbare dichte Teilmenge hat. (Dabei helfen die Überdeckungen $K \subseteq \bigcup\limits_{x \in K} B(x, 1/n)$.)

Aufgabe 20
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine surjektive stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl unendlich oft als Wert angenommen wird.
Tipp: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(\{x\}) = f^{-1}(]-\infty, x[) \cup f^{-1}(]x, \infty[)$. Andererseits sind in $\mathbb{R}^2$ Komplemente endlicher Mengen zusammenhängend.