J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
07.05.2013

Topologie
Übungsblatt 4
Abgabe: Dienstag, 14. Mai 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

Aufgabe 13
Zeigen Sie für offene Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$, dass die Zusammenhangskomponenten von M offen sind (gemäß 1.11 der Vorlesung sind sie auch abgeschlossen in der Relativtopologie auf M).

Aufgabe 14
Eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *lokal polynomial*, wenn es für jedes $x \in I$ ein Polynom p und ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f und p auf $I \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ übereinstimmen.
Zeigen Sie, dass jede lokal polynomiale Funktion ein Polynom ist.
Tipp: Zwei Polynome sind gleich, wenn sie auf einer unendlichen Menge übereinstimmen.

Aufgabe 15
Zeigen Sie, dass jede auf einem Intervall definierte stetige und injektive Funktion streng monoton ist, indem sie eine geeignete Funktion auf $\{(s,t) \in I \times I : s < t\}$ definieren.

Aufgabe 16
Seien $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ und

$$\begin{aligned}\mathscr{B} =& \{B((x,y),\varepsilon) : (x,y) \in X, 0 < \varepsilon < y\} \\ & \cup \{B((x,y),y) \cup \{(x,0)\} : x \in \mathbb{R}, y > 0\}.\end{aligned}$$

Weil für alle $A, B \in \mathscr{B}$ und $z \in A \cap B$ ein $C \in \mathscr{B}$ existiert mit $z \in C \subseteq A \cap B$, ist wie in Aufgabe 6 durch

$$\mathscr{T} = \{M \subseteq X : \forall\, z \in M\, \exists\, B \in \mathscr{B}\; z \in B \subseteq M\}$$

eine Topologie auf X definiert. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\mathbb{R} \times \{0\}$ ist in $(X, \mathscr{T})$ abgeschlossen und $\mathscr{T}|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ ist die diskrete Topologie.

(b) $D = \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \cap]0, \infty[)$ ist dicht in X, d.h. $\overline{D}^{\mathscr{T}} = X$.

(c) Die Abbildung $\{F : (X, \mathscr{T}) \to \mathbb{R} \text{ stetig}\} \longrightarrow \mathbb{R}^D$, $F \mapsto F|_D$ ist injektiv (dabei ist $\mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie versehen, und $\mathbb{R}^D$ ist die Menge *aller* Abbildung von D nach $\mathbb{R}$).

(d) Es gibt stetige Funktionen $f : (\mathbb{R} \times \{0\}, \mathscr{T}|_{\mathbb{R}\times\{0\}}) \to \mathbb{R}$, die keine Fortsetzung zu einer stetigen Funktion $F : (X, \mathscr{T}) \to \mathbb{R}$ haben.

Tipp: Wegen (a) und (c) gäbe es sonst eine surjektive Abbildung $\mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass das nicht sein kann.