J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
07.05.2013

Übungen zur Topologie

Aufgabe 8

Für eine nicht-leere Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) sei $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Zeigen Sie, dass die auf $(\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\})^2$ definierte Abbildung

$$H(A, B) = \sup\{\operatorname{dist}(x, B) : x \in A\} \cup \{\operatorname{dist}(x, A) : x \in B\}$$

die Eigenschaften einer Halbmetrik besitzt.
Weil $H(A, B)$ den Wert ∞ annehmen kann, ist dieser *Hausdorff-Abstand* keine Halbmetrik. Das kann man leicht reparieren, indem man $\tilde{H}(A, B) = \min\{H(A, B), 1\}$ betrachtet.

Die Reflexität $H(A, A) = 0$ und die Symmetrie $H(A, B) = H(B, A)$ sind klar. Für die Dreiecksungleichung

$$H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$$

reicht es zu zeigen, dass die rechte Seite eine obere Schranke von $\{\operatorname{dist}(x, C) : x \in A\}$ ist (durch Rollentausch erhält man dann auch die entsprechende Aussage für $\{\operatorname{dist}(x, A) : x \in C\}$). Seien also $x \in A$ und $\varepsilon > 0$. Natürlich wollen wir für geeignete $b \in B$ und $c \in C$ die Dreiecksungleichung

$$d(x, c) \leq d(x, b) + d(b, c)$$

anwenden. Wir wählen also zuerst ein $b \in B$ mit $d(x, b) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \varepsilon$ (was möglich ist, da $\operatorname{dist}(x, B) + \varepsilon$ keine untere Schranke von $\{d(x, b) : b \in B\}$ ist) und dann ein $c \in C$ mit $d(b, c) \leq \operatorname{dist}(b, c) + \varepsilon$. Dann folgt

$$d(x, c) \leq \operatorname{dist}(x, B) + \operatorname{dist}(b, c) + 2\varepsilon \leq H(A, B) + H(B, C) + 2\varepsilon,$$

und mit $\varepsilon \to 0$ folgt die zu zeigende Aussage.