J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
30.04.2013

Topologie
Übungsblatt 3
Abgabe: Dienstag, 07. Mai 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

Aufgabe 8
Seien $(X, \mathscr{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie folgende Aussagen

(a) $\mathscr{T}|_M = \{A \in \mathscr{T} : A \subseteq M\} \Longleftrightarrow M \in \mathscr{T}$.

(b) Für alle $B \subseteq M$ gilt $\overline{B}^{(M,\mathscr{T}|_M)} = \overline{B}^{(X,\mathscr{T})} \cap M$.

Aufgabe 9
Seien $(X, \mathscr{T}), (X, \mathfrak{S})$ zwei topologische Räume, $M, N \subseteq X$ sowie $f : (M, \mathscr{T}|_M) \to (Y, \mathfrak{S})$ und $g : (N, \mathscr{T}|_n) \to (Y, \mathfrak{S})$ zwei stetige Abbildungen, die auf $M \cap N$ übereinstimmen. Dann ist $h : M \cup N \to Y$, $h(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ falls } x \in M \\ g(x) & , \text{ falls } x \in N \end{cases}$ also eine wohldefinierte Abbildung.
Zeigen Sie, dass h stetig ist, falls entweder M und N beide offen sind oder M und N beide abgeschlossen.
Stimmt dies auch falls M offen ist und N abgeschlossen?

Aufgabe 10
Sei e die „französische Eisenbahnmetrik“ auf $\mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 2 und $\mathscr{E}$ die erzeugte Topologie.

(a) Bestimmen Sie Relativtopologie $\mathscr{E}|_{S^1}$ auf $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

(b) Zeigen Sie für jede zusammenhängende Teilmenge M von $(\mathbb{R}^2, \mathscr{E})$ mit $0 \notin M$, dass M in einem Strahl $\{\lambda x_0 : \lambda > 0\}$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^2$ enthalten ist.

Aufgabe 11
Seien $(X, \mathscr{T})$ und $(Y, \mathfrak{S})$ zwei topologische Räume, $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$. Zeigen Sie:

(a) Sind M und N wegzusammenhängend, so ist dies auch $M \times N$.

(b) Sind M und N zusammenhängend, so ist dies auch $M \times N$.

(c) Wann gilt in (a) und (b) die umgekehrte Implikation?

Tipp zu (b): Ist $M \times N$ in disjunkte offene Mengen A, B zerlegt und $(a, b) \in (M \times N) \cap A$, so zeigt man $\{a\} \times N \subseteq A$ durch Betrachten von $\{y \in N : (a, y) \in A\}$ und $\{y \in N : (a, y) \in B\}$.

Aufgabe 12 (Bonusaufgabe, 10 Sonderpunkte)
Zeigen Sie für jede abzählbare Teilmenge M von $\mathbb{R}^2$, dass $\mathbb{R}^2 \setminus M$ wegzusammendhängend ist.