J. Wengenroth SS 2013
M. Riefer 23.04.2013

Topologie
Übungsblatt 2
Abgabe: Dienstag, 30. April 2013, Übungskasten 5

Aufgabe 5
Seien X eine Menge, $\mathscr{P}(X)$ ihre Potenzmenge und $h : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $h(\emptyset) = \emptyset$,

(2) $A \subseteq h(A)$,

(3) $h(A) = h(h(A))$,

(4) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$.

Dann ist $\mathscr{T} = \{M \subseteq X : M^c = h(M^c)\}$ eine Topologie mit $\overline{M} = h(M)$ für alle $M \subseteq X$.
Tipp: Für die Vereinigungsstabilität für $M_i \in \mathscr{T}$ setze man $A_i = M_i^c$ und benutze (2) und (3), um $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \subseteq h\left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ zu zeigen.

Aufgabe 6
Seien X eine Menge und $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ ein System mit

(1) $\bigcup \mathscr{B} = X$ (d.h. jedes $x \in X$ ist Element eines $B \in \mathscr{B}$)

(2) $A \in \mathscr{B}, B \in \mathscr{B} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{B}$

Dann ist $\tau(\mathscr{B}) = \{M \subseteq X : \forall\, x \in M\ \exists\, B \in \mathscr{B} \text{ mit } x \in B \subseteq M\}$ eine Topologie mit $\mathscr{B} \subseteq \tau(\mathscr{B})$. Außerdem gilt für jede Toplogie $\mathscr{T}$ auf X mit $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$ auch $\tau(\mathscr{B}) \subseteq \mathscr{T}$.

Aufgabe 7
Seien $\mathscr{B} = \{[a, b[: a, b \in \mathbb{R}\}$ und $\mathscr{S} = \tau(\mathscr{B})$ wie in Aufgabe 6.

(a) Für die vom Betragsabstand erzeugte Topologie $\mathscr{T}$ gilt $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{S}$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[a, b[$ $\mathscr{S}$-abgeschlossen.

(c) Für $M \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \in \overline{M}^{\mathscr{S}}$ genau dann, wenn es $x_n \in M \cap [x, \infty[$ gibt, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

(d) Eine Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathscr{S}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{T})$ ist genau dann in $x \in \mathbb{R}$ stetig, wenn f in x rechtsseitig stetig ist (d.h. $\lim\limits_{x \leq y \to x} f(y) = f(x)$).

Aufgabe 8

Für einen metrischen Raum (X, d) und $\emptyset \neq A \subseteq X$ sei

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ auf X stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$H(A, B) = \sup \{\operatorname{dist}(x, B) : x \in A\} \cup \{\operatorname{dist}(y, A) : y \in B\}$$

eine Halbmetrik auf $\mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ definiert ist.

(c) Berechnen Sie $H(A, \overline{A})$ für alle $A \in \mathscr{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.