J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
09.07.2013

Topologie
Übungsblatt 11
Abgabe: Dienstag, 16. Juli 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

Aufgabe 42
Seien (X, x_0) und (Y, y_0) zwei topologische Räume mit Basispunkten x_0 und y_0, so dass es offene Umgebungen $U \in \mathscr{U}_{x_0}(X)$ und $V \in \mathscr{U}_{y_0}(Y)$ gibt, die x_0 beziehungsweise y_0 als Deformationsretrakt enthalten.
Ist $Z = X \vee Y$ wie in Aufgabe 29 mit der zu x_0 gehörigen Äquivalenzklasse z_0 als Basispunkt, so zeige man

$$\pi_1(X \vee Y, z_0) \approx \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0).$$

Aufgabe 43

(a) Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung eines wegzusammenhängenden Raums X, so dass es ein $x_0 \in X$ mit endlicher Faser $p^{-1}(x_0)$ gibt. Zeigen Sie, dass alle Fasern $p^{-1}(x)$ endlich sind und die gleiche Anzahl von Elementen haben wie $p^{-1}(x_0)$.

(b) Ist außerdem Y wegzusammenhängend, so ist $|p^{-1}(x_0)|$ der Index der Untergruppe $p_*(\pi_1(Y, y_0))$ von $\pi_1(X, x_0)$, wobei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$. (Der Index einer Untergruppe U von G ist die Anzahl der Klassen bezüglich der Äquivalenzrelation $x \sim y \iff y^{-1}x \in U$).

Aufgabe 44
Seien $X = Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $p : Y \to X, z \mapsto z^n$ für ein $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass p eine Überlagerung ist, so dass jede Faser $|n|$-elementig ist.

(b) Berechnen Sie die Untergruppe $p_*(\pi_1(Y, 1))$ von $\pi_1(X, 1)$.

Aufgabe 45

(a) Für eine Überlagerung $p : Y \to X$ und $A \subseteq X$ finde man eine Überlagerung von A.

(b) Für zwei Überlagerungen $p_j : Y_j \to X_j$, $j \in \{1, 2\}$, finde man eine Überlagerung von $X_1 \times X_2$.