J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
02.07.2013

Topologie
Übungsblatt 10
Abgabe: Dienstag, 09. Juli 2013, vor der Übung in Übungskasten 5

Aufgabe 38

(a) Seien $A, B, C \subseteq S^2$ abgeschlossen mit $S^2 \subseteq A \cup B \cup C$. Zeigen Sie, dass mindestens eine der Mengen ein antipodales Punktepaar $x, -x$ enthält.

Tipp: $f(x) = (\operatorname{dist}(x, A), \operatorname{dist}(x, B))$.

(b) Gibt es stetige und injektive Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

Aufgabe 39
Seien $(X, *)$ eine topologische Gruppe und f, g, h, i Schleifen am neutralen Element e. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für die durch $(f * g)(t) = f(t) * g(t)$ definierten Schleifen gilt

$$(f * g) \,.\, (h * i) = (f \,.\, h) * (g \,.\, i)$$

(b) Für $f \simeq \tilde{f}$ und $g \simeq \tilde{g}$ gilt $f * g \simeq \tilde{f} * \tilde{g}$, so dass $[f] * [g] = [f * g]$ wohldefiniert ist und die Rechenregel aus (a) erfüllt.

(c) $[f] * [h] = [f] \,.\, [h]$.

(d) $\pi_1(X, e)$ ist abelsch.

Aufgabe 40
Für jede Überlagerung $p : Y \to X$ und $y_0 \in Y$ mit $x_0 = p(y_0)$ ist der induzierte Gruppenmorphismus $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injektiv.

Aufgabe 41
Seien $R = [a, b] \times [c, d]$ ein Rechteck und $f, g : I \to R$ zwei stetige Kurven, so dass f den linken Rand mit dem rechten verbindet und g den oberen mit dem unteren (das heißt, $f(0) \in \{a\} \times [c, d]$, $f(1) \in \{b\} \times [c, d]$ etc.). Zeigen Sie, dass f und g einander schneiden, das heißt es gibt $s, t \in I$ mit $f(s) = g(t)$.

Versuchen Sie mindestens 15 Minuten lang, diese (*offensichtliche?*) Eigenschaft zu beweisen, bevor Sie sich den Hinweis ansehen.