J. Wengenroth
M. Riefer

SS 2013
16.04.2013

Topologie
Übungsblatt 1
Abgabe: Dienstag, 23. April 2013, Übungskasten 5

Aufgabe 1
Kann man in der Situation des Königsberger Brückenproblems eine weitere Brücke bauen, so dass es einen Weg gibt, der jede der dann acht Brücken genau einmal überquert? Kann man auch eine Brücke abreißen?

Aufgabe 2
Sei d die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^2$. Wir definieren

$$e(x,y) = \begin{cases} d(x,y), \exists\,\lambda \geq 0 \text{ mit } x = \lambda y \\ d(x,0) + d(0,y), \text{sonst} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass e eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert, so dass die identische Abbildung $i : (\mathbb{R}^2, e) \to (\mathbb{R}^2, d)$ stetig ist, aber die Umkehrung nicht. Skizzieren Sie für einige $x \in \mathbb{R}^2$ sowohl Kugeln um x mit Radius $r \leq d(x,0)$ als auch mit Radius $r > d(x,0)$.

Aufgabe 3

(a) Versuchen Sie folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ in „Homöomorphieklassen" einzuteilen:

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Sie brauchen keine stetigen Bijektionen mit stetigen Umkehrfunktionen anzugeben, sondern sollen nur Argumente finden, die die Klassen topologisch unterscheiden.

(b) Sind die Mengen ∞ und $\circ\!-\!\circ$ homöomorph?

Aufgabe 4
Auf der Menge X aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ definieren wir

$$d_k(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \wedge \tfrac{1}{k} : |x| \leq k\} \text{ und } d(f,g) = \sup\{d_k(f,g) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist, so dass Folgen von Funktionen genau dann bezüglich d konvergieren, wenn sie auf allen kompakten Mengen gleichmäßig konvergieren.