J. Wengenroth
D. Sieg

SS 2009
18.06.2009

Grundlagen der Funktionentheorie
Übungsblatt 4

Ü 16

Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, dass die Cauchy-Ungleichung $|f^{(n)}(\xi)| \leq \frac{n!M}{R^n}$ aus Satz 3.14 scharf ist, das heißt, es gibt f, so dass Gleichheit gilt. (Tipp: $z \mapsto z^n$ auf $B(0,1)$).

Ü 17

Geben Sie einen weiteren Beweis des Satzes 3.7 von Liouville mit Hilfe der Cauchy-Ungleichungen (für $\xi = 0$ und $R \to \infty$).

Ü 18

Formulieren Sie ein „Minimumprinzip“ für nullstellenfreie holomorphe Funktionen, und folgern Sie daraus den Fundamentalsatz der Algebra.

Ü 19

Seien $f, g \in H(\mathbb{C})$ mit $|f(z)| \leq |g(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f ein Vielfaches von g ist. (Tipp: Ist g nicht konstant gleich Null, so hat f/g nur isolierte Singularitäten und ist durch 1 beschränkt.)

Ü 20

Seien $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Zeigen Sie $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$ (Schwarzsches Lemma). Beweisen Sie außerdem, dass die Existenz von $z_0 \neq 0$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$ impliziert, dass f eine Drehung ist, das heißt, $f(z) = az$ mit einem $|a| = 1$. (Tipp: Wenden Sie das Maximumprinzip 3.15 (a) auf $f(z)/z$ und alle kleineren Kreise $B(0,r)$ mit $r < 1$ an.)

Die Vorlesung zur Funktionentheorie findet nächste Woche am Mittwoch, 24. Juni 2009, 18 - 20 Uhr, statt. Die Übung dazu wird auf Donnerstag, 25. Juni 2009, 10 - 12 Uhr, verlegt.